グラフとネットワーク　第 9 回
連結性：数理とモデル化

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2019 年 6 月 28 日

最終更新：2019 年 7 月 2 日　13:15

スケジュール 前半

1. グラフの定義と次数：数理 (4/12)
2. 道と閉路：数理 (4/19)
3. 木：数理 (4/26)
- ＊ 休み (5/3)
- ＊ 休講 (5/10)
4. マッチング：数理 (5/17)
5. マッチング：モデル化 (5/24)
6. 最大流：数理 (5/31)
- 中間試験 (6/7)

スケジュール 後半 (予定)

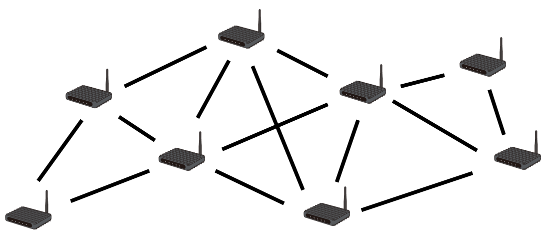
7. 最大流：モデル化 (1) — 割当 (6/14)
8. 最大流：モデル化 (2) — カットの視点 (6/21)
9. 連結性：数理とモデル化 (6/28)
10. 彩色：数理 (7/5)
11. 彩色：モデル化 (7/12)
12. 平面グラフ：数理 (7/19)
13. 平面グラフ：モデル化 (7/26)
14. (授業等調整日) ← 行わない (8/2)
- 期末試験 (8/9？)

注意：予定の変更もありうる

概要

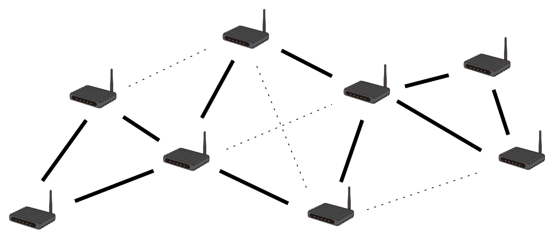
今日の目標
- グラフの連結性に関する概念を理解し，正しく使えるようになる
- 連結度に関する Menger の定理を最大流と関係づけられるようになる

センサネットワークにおける通信



https://www.logitec.co.jp/products/wlan/lanmbw300ps/

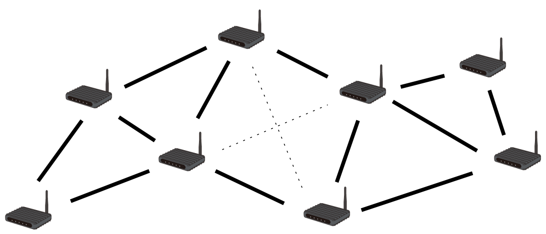
センサネットワークにおける通信：リンク故障



https://www.logitec.co.jp/products/wlan/lanmbw300ps/

⇝ 辺連結度：リンク故障への耐性を表す数

センサネットワークにおける通信：ノード故障



https://www.logitec.co.jp/products/wlan/lanmbw300ps/

⇝ 点連結度：ノード故障への耐性を表す数

目次

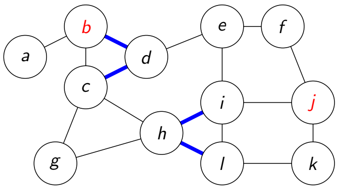
非連結化集合：無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$，異なる 2 頂点 $s, t \in V$

定義：非連結化集合とは？

辺部分集合 $F \subseteq E$ が G の s, t 非連結化集合であるとは，
$G - F$ において，s から t への道が存在しないこと

青い辺から成る集合は b, j 非連結化集合



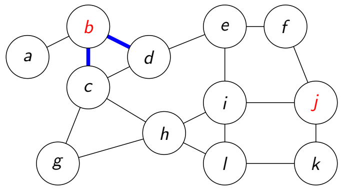
辺連結度：無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$，異なる 2 頂点 $s, t \in V$

定義：辺連結度とは？

G の s, t 辺連結度とは，
G の s, t 非連結化集合の要素数の最小値

$\lambda_{s,t}(G)$ で表す　　($\lambda_G(s, t)$，$\lambda(G; s, t)$ と表すこともある)



$\lambda_{b,j}(G) = 2$

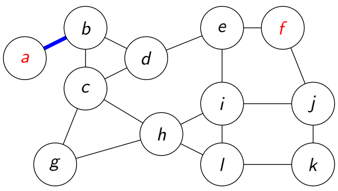
これは局所的，部分的なリンク故障耐性を表す

大域辺連結度：無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：大域辺連結度とは？

G の大域辺連結度とは，$\lambda(G) = \min\{\lambda_{s,t}(G) \mid s, t \in V, s \neq t\}$
つまり，s, t 辺連結度の (s, t の選び方に関する) 最小値



$\lambda(G) = \lambda_{a,f}(G) = 1$

これは大域的，全体的なリンク故障耐性を表す

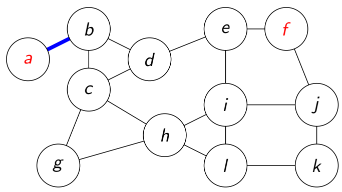
辺連結性：無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 $k \geq 0$

定義：辺連結性とは？

G が k 辺連結であるとは，$\lambda(G) \geq k$ であること
つまり，要素数 $k - 1$ 以下の辺部分集合を除去して G を非連結にできない

このグラフは 1 辺連結であるが，2 辺連結ではない



注：G が連結 $\Leftrightarrow$ G が 1 辺連結

目次

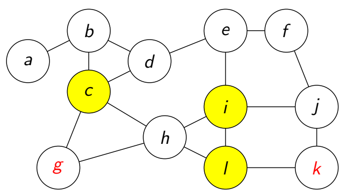
分離集合：無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$，異なる 2 頂点 $s, t \in V$ (ただし，$\{s, t\} \notin E$)

定義：分離集合とは？

頂点集合 $S \subseteq V - \{s, t\}$ が G の s, t 分離集合であるとは，
$G - S$ において，s から t への道が存在しないこと

黄色の頂点から成る集合は g, k 分離集合



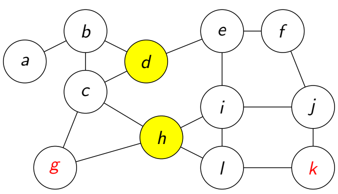
点連結度：無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$，異なる 2 頂点 $s, t \in V$ (ただし，$\{s, t\} \notin E$)

定義：点連結度とは？

G の s, t 点連結度とは，
G の s, t 分離集合の要素数の最小値

$\kappa_{s,t}(G)$ で表す　　($\kappa_G(s, t)$，$\kappa(G; s, t)$ と表すこともある)



$\kappa_{g,k}(G) = 2$

これは局所的，部分的なノード故障耐性を表す

大域点連結度：無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$

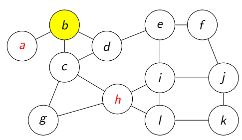
定義：大域点連結度とは？

G の大域点連結度とは，G が完全グラフではない場合

$$\kappa(G) = \min\{\kappa_{s,t}(G) \mid s, t \in V, s \neq t, \{s, t\} \notin E\}$$

つまり，s, t 点連結度の (s, t の選び方に関する) 最小値

頂点数 n の完全グラフ K_n に対して，$\kappa(K_n) = n - 1$ と定義する



これは大域的，全体的なノード故障耐性を表す

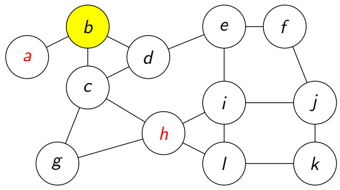
点連結性：無向グラフ

無向グラフ $G=(V,E)$，自然数 $k \geq 0$

定義：点連結性とは？

G が k 点連結であるとは，$\kappa(G) \geq k$ であること
つまり，要素数 $k-1$ 以下の頂点部分集合を除去しても G は連結

このグラフは 1 点連結であるが，2 点連結ではない



注：G が連結 $\Leftrightarrow$ G が 1 点連結

用語の対応：無向グラフ

辺	頂点
s,t 非連結化集合	s,t 分離集合
s,t 辺連結度	s,t 点連結度
$\lambda_{s,t}(G)$	$\kappa_{s,t}(G)$
大域辺連結度	大域点連結度
$\lambda(G)$	$\kappa(G)$
k 辺連結	k 点連結

- s,t 非連結化集合を，s,t 辺カットと呼ぶことがある
- s,t 分離集合を，s,t 点カットと呼ぶことがある

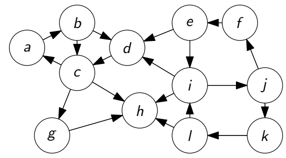
目次

有向グラフの強連結性

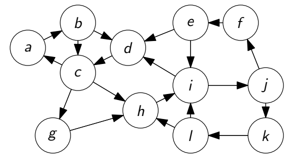
有向グラフ $G=(V,A)$

定義：有向グラフが強連結であるとは？

G が強連結であるとは，
任意の 2 頂点 $u,v \in V$ に対して，u から v へ至る有向道が存在すること



強連結でない



強連結である

注：「グラフが強連結している」とは言わない

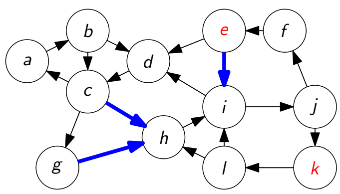
非連結化集合：有向グラフ

有向グラフ $G=(V,A)$，異なる 2 頂点 $s,t \in V$

定義：非連結化集合とは？

弧部分集合 $F \subseteq A$ が G の s,t 非連結化集合であるとは，
$G-F$ において，s から t への有向道が存在しないこと

青い弧から成る集合は e,k 非連結化集合



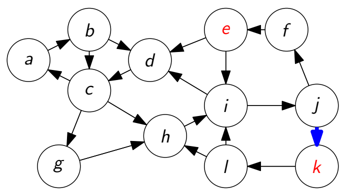
弧連結度：有向グラフ

有向グラフ $G=(V,A)$，異なる 2 頂点 $s,t \in V$

定義：弧連結度とは？

G の s,t 弧連結度とは，
G の s,t 非連結化集合の要素数の最小値

$\lambda_{s,t}(G)$ で表す　　($\lambda_G(s,t)$, $\lambda(G;s,t)$ と表すこともある)



$\lambda_{e,k}(G) \leq 2 = 1$

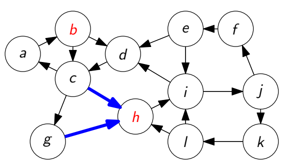
これは局所的，部分的なリンク故障耐性を表す

弧連結度：有向グラフ (注意)

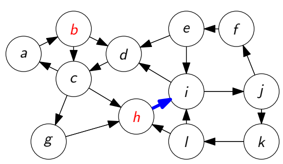
有向グラフ $G=(V,A)$，異なる 2 頂点 $s,t \in V$

注意

$\lambda_{s,t}(G) \neq \lambda_{t,s}(G)$ かもしれない



$\lambda_{b,h}(G)=2$



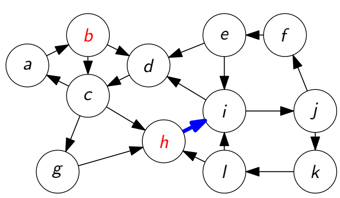
$\lambda_{h,b}(G)=1$

大域弧連結度：有向グラフ

有向グラフ $G=(V,A)$

定義：大域弧連結度とは？

G の大域弧連結度とは，$\lambda(G)=\min\{\lambda_{s,t}(G) \mid s,t \in V, s \neq t\}$
つまり，s,t 弧連結度の (s,t の選び方に関する) 最小値



$\lambda(G)=1$

これは大域的，全体的なリンク故障耐性を表す

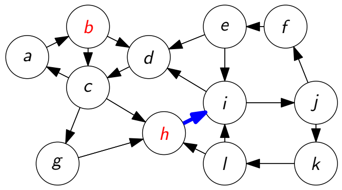
弧連結性：有向グラフ

有向グラフ $G = (V, A)$，自然数 $k \geq 0$

定義：弧連結性とは？

G が k 弧連結であるとは，$\lambda(G) \geq k$ であること
つまり，要素数 $k-1$ 以下の弧部分集合をどう除去しても G は強連結

このグラフは 1 弧連結であるが，2 弧連結ではない



注：G が強連結 $\Leftrightarrow$ G が 1 弧連結

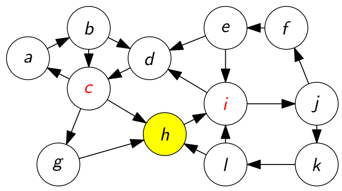
分離集合：有向グラフ

有向グラフ $G = (V, A)$，異なる 2 頂点 $s, t \in V$ (ただし，$(s, t) \notin A$)

定義：分離集合とは？

頂点集合 $S \subseteq V - \{s, t\}$ が G の s, t 分離集合であるとは，
$G - S$ において，s から t への有向道が存在しないこと

黄色の頂点から成る集合は c, i 分離集合



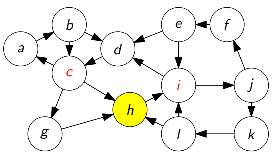
点連結度：有向グラフ

有向グラフ $G = (V, A)$，異なる 2 頂点 $s, t \in V$ (ただし，$(s, t) \notin A$)

定義：点連結度とは？

G の s, t 点連結度とは，
G の s, t 分離集合の要素数の最小値

$\kappa_{s,t}(G)$ で表す　　($\kappa_G(s, t)$，$\kappa(G; s, t)$ と表すこともある)



$\kappa_{c,i}(G) = 1$

これは局所的，部分的なノード故障耐性を表す
注：$\kappa_{s,t}(G) \neq \kappa_{t,s}(G)$ かもしれない

大域点連結度：有向グラフ

有向グラフ $G = (V, A)$

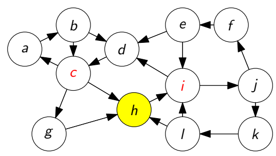
定義：大域点連結度とは？

G の大域点連結度とは，ある $u, v \in V$ に対して $(u, v) \notin A$ であるとき，

$$\kappa(G) = \min\{\kappa_{s,t}(G) \mid s, t \in V, s \neq t, (s, t) \notin A\}$$

つまり，s, t 点連結度の (s, t の選び方に関する) 最小値

任意の $u, v \in V$ ($u \neq v$) に対して $(u, v) \in A$ であるとき，$\kappa(G) = |V| - 1$ と定義



$\kappa(G) = 1$

これは大域的，全体的なノード故障耐性を表す

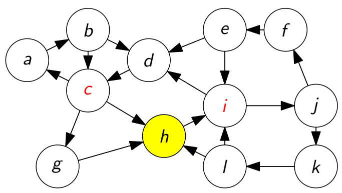
点連結性：有向グラフ

有向グラフ $G = (V, A)$，自然数 $k \geq 0$

定義：点連結性とは？

G が k 点連結であるとは，$\kappa(G) \geq k$ であること
つまり，要素数 $k-1$ 以下の頂点部分集合をどう除去しても G は強連結

このグラフは 1 点連結であるが，2 点連結ではない



注：G が強連結 $\Leftrightarrow$ G が 1 点連結

用語の対応：有向グラフ

弧	頂点
s, t 非連結化集合	s, t 分離集合
s, t 弧連結度	s, t 点連結度
$\lambda_{s,t}(G)$	$\kappa_{s,t}(G)$
大域弧連結度	大域点連結度
$\lambda(G)$	$\kappa(G)$
k 弧連結	k 点連結

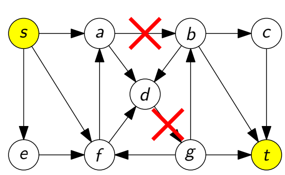
- s, t 非連結化集合を，s, t 弧カットと呼ぶことがある
- s, t 分離集合を，s, t 点カットと呼ぶことがある

目次

s, t 弧連結度をどのように計算するか？

目標

s, t 弧連結度の計算を最小 s, t カット問題としてモデル化する

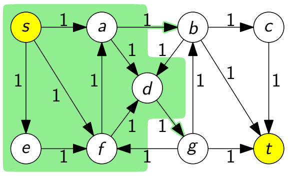


最小 s,t カット問題としてのモデル化：着眼点

観察

弧を除去すると s から t へ行けなくなる

- $\Rightarrow$ 弧を除去した後に，s からたどり着ける部分は G の s,t カット
- $\Rightarrow$ 除去した弧の数 $=$ その s,t カットから出る弧の数
- $\Rightarrow$ 全ての弧容量 $= 1$ ならば，
  s,t カットから出る弧の数 $=$ s,t カットの容量
- $\therefore$ 最小 s,t カットの容量から弧連結度が分かる

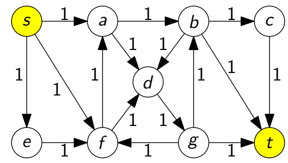


最小 s,t カット問題としてのモデル化

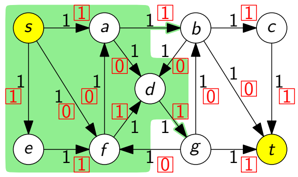
s,t 弧連結度を計算する問題を最小 s,t カット問題としてモデル化する

モデル化

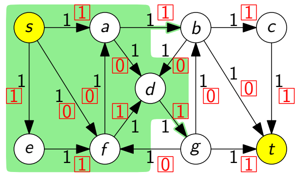
- グラフ：そのまま
- 容量：すべての弧の容量 $= 1$

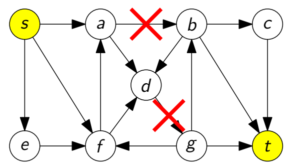


最小 s,t カット問題：最大流と最小 s,t カット



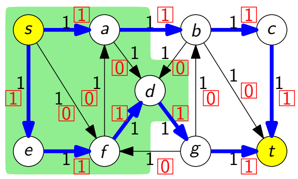
解いた結果を再解釈 (1)





- s,t カットから出る弧が弧連結度を与える
- 流れは何に対応するか？

解いた結果を再解釈 (2)

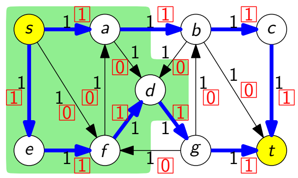


- 1 だけ流れている弧だけ見てみると，道が構成できる
- 道の数 $=$ 最大流の値 $=$ s,t 弧連結度
- $\therefore$ 流れが道に対応している
- 注：これらの道は同じ弧を共有しない

「流れ」という比喩

流れ	——	道
たくさん流す	——	道を多く選ぶ

Menger の定理



最大流最小カット定理より，
任意の有向グラフ $G = (V, A)$，任意の $s, t \in V$ に対して

定理：Menger の定理 (有向グラフ・弧連結度版)

s から t へ至る有向道で弧を共有しないものの最大数 $=$ s,t 弧連結度

Karl Menger

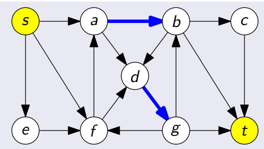
Karl Menger
カール・メンガー
(1902–1985)

http://en.wikipedia.org/wiki/Karl_Menger

双対性の利用法

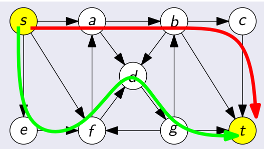
次のグラフの s,t 弧連結度は何か？

上界



s,t 弧連結度 ≤ 2

下界 (かかい)



s,t 弧連結度 ≥ 2

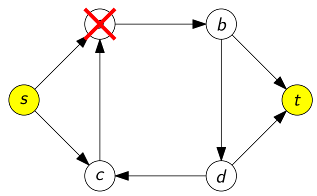
したがって，s,t 弧連結度 $= 2$

目次

s, t 点連結度をどのように計算するか？

目標

s, t 点連結度の計算を最小 s, t カット問題としてモデル化する



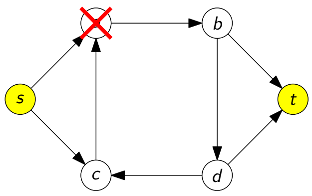
最小 s, t カット問題としてのモデル化：着眼点

観察

s, t 弧連結度のときと同様に，s, t カットを見てみたい

- しかし，s, t カットを見るときに壊すのは弧

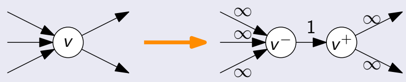
$\therefore$ 頂点の問題を弧の問題に変換するため，グラフに操作を施す

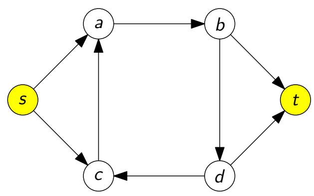


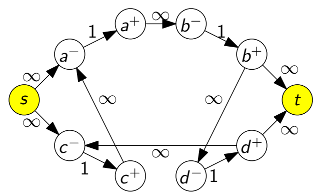
最小 s, t カット問題としてのモデル化：操作

行う操作

各頂点に対して次の操作を行い，弧の容量も次のように定める





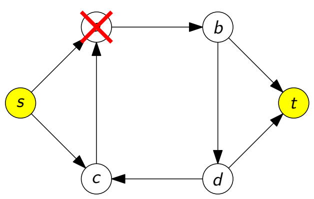


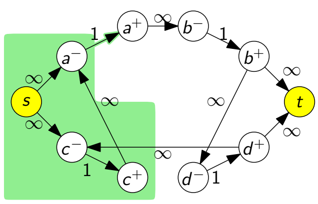
最小 s, t カット問題としてのモデル化：操作に対する直感

- 最小 s, t カットから容量 ∞ の弧が出ていけない

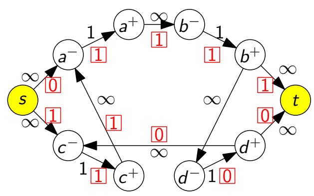
$\therefore$ 最小 s, t カットから出る弧の容量はすべて 1

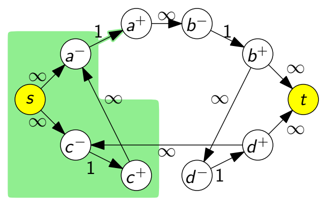
- そのような弧はもとのグラフにおける頂点に対応
- 対応する頂点を取り除けば，s から t に行けなくなる





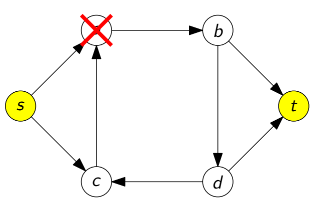
最大流と最小 s, t カット

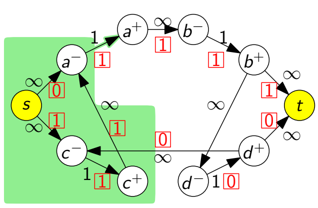




最大流の値 $=1=$ 最小 s, t カットの容量

解いた結果を再解釈 (1)

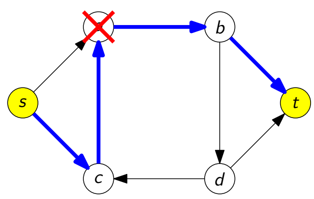


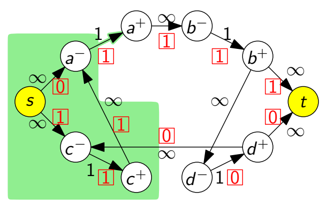


- s, t カットから出る弧に対応する頂点が s, t 点連結度を与える
- 流れは何に対応するか？

整数流定理と容量の決め方から，各弧上を流れている量は 0 か 1

解いた結果を再解釈 (2)



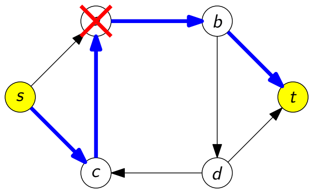


- 1 だけ流れている弧に対応する部分は道になる
- 道の数 $=$ 最大流の値 $=$ s, t 点連結度
- $\therefore$ 流れが道に対応している
- 注：これらの道は s, t 以外の頂点を共有しない

「流れ」という比喩

流れ	——	道
たくさん流す	——	道を多く選ぶ

Menger の定理 (点連結度版)



最大流最小カット定理より，
任意の有向グラフ $G = (V, A)$，任意の $s, t \in V$ (ただし，$(s, t) \notin A$) に対して

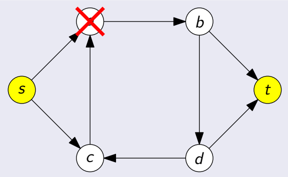
定理：Menger の定理 (有向グラフ・点連結度版)

s から t へ至る有向道で頂点を s, t 以外共有しないものの最大数 $=$ s, t 点連結度

双対性の利用法

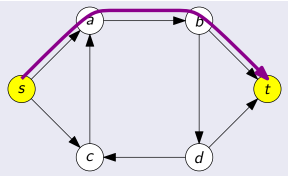
次のグラフの s, t 点連結度は何か？

上界



s, t 点連結度 ≤ 1

下界



s, t 点連結度 ≥ 1

したがって，s, t 点連結度 $= 1$

補足：無向グラフにおける辺連結度と点連結度

Menger の定理は無向グラフでも成立する

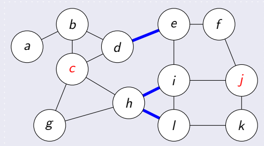
定理：Menger の定理 (無向グラフ版)

- 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ と任意の $s, t \in V$ に対して
  s から t へ至る道で辺を共有しないものの最大数 $=$ s, t 辺連結度
- 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ と任意の $s, t \in V$ (ただし，$\{s, t\} \notin E$) に対して
  s から t へ至る道で s, t 以外に頂点を共有しないものの最大数 $=$ s, t 点連結度

証明は省略 (弱双対性は演習問題 (数え上げによる証明))

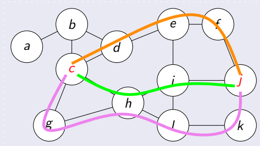
双対性の利用法

上界



c, j 辺連結度 ≤ 3

下界

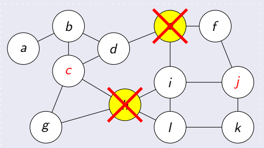


c, j 辺連結度 ≥ 3

したがって，c, j 辺連結度 $= 3$

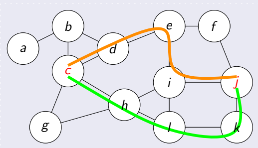
双対性の利用法

上界



c, j 点連結度 ≤ 2

下界



c, j 点連結度 ≥ 2

したがって，c, j 点連結度 $= 2$

目次

今日のまとめ

今日の目標

- グラフの連結性に関する概念を理解し，正しく使えるようになる
- 連結度に関する Menger の定理を最大流と関係づけられるようになる