グラフとネットワーク　第 6 回
最大流：数理

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2019 年 5 月 31 日

最終更新：2019 年 5 月 31 日　12:42

スケジュール 前半 (予定)

1. グラフの定義と次数：数理 (4/12)
2. 道と閉路：数理 (4/19)
3. 木：数理 (4/26)

- ＊ 休み (5/3)
- ＊ 休講 (5/10)

4. マッチング：数理 (5/17)
5. マッチング：モデル化 (5/24)
6. 最大流：数理 (5/31)

- 中間試験 (6/7)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

7. 最大流：モデル化 (1) — 割当 (6/14)
8. 最大流：モデル化 (2) — カットの視点 (6/21)
9. 連結性：数理とモデル化 (6/28)
10. 彩色：数理 (7/5)
11. 彩色：モデル化 (7/12)
12. 平面グラフ：数理 (7/19)
13. 平面グラフ：モデル化 (7/26)
14. (授業等調整日) (8/2)

- 期末試験 (8/9？)

注意：予定の変更もありうる

概要

今日の目標

最大流問題に関して次ができるようになる

- 「流れ」が何であるのか記述でき，基本性質を証明できる
- 流れとカットの双対性により流れの最大性を証明できる

重要な定理

- 最大流最小カット定理
- 整数流定理

目次

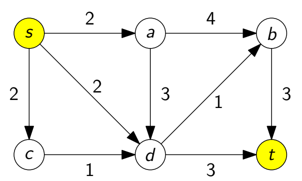
1. 最大流問題とは？
2. 流れとカットの弱双対性
3. 流れとカットの強双対性：最大流最小カット定理
4. 今日のまとめ

最大流問題とは？

定義：最大流問題とは？

入力

- 有向グラフ $G = (V, A)$，各弧 $a \in A$ の容量 $c(a)$，2 頂点 $s, t \in V$
(弧の容量は非負実数)

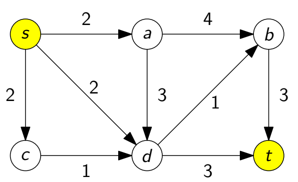


最大流問題とは？

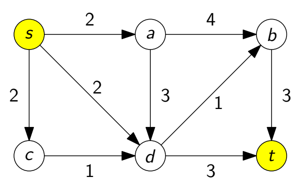
定義：最大流問題とは？

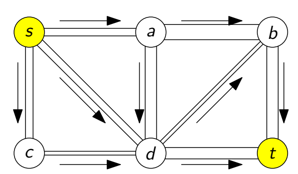
出力

- s から t へ至る流れで，その値が最大のもの
(s から t へ至る最大流)

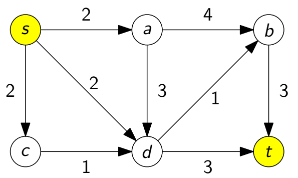


流れとは ?: 直感 (1)

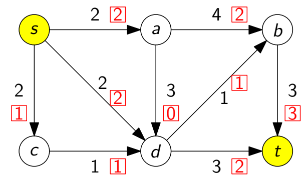


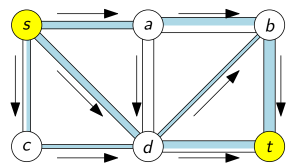


流れとは ?: 直感 (2)



流れとは ?: 直感 (3)





流れとは？ (1)

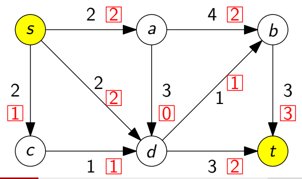
定義：s から t へ至る流れとは？

各弧 $a \in A$ に対する実数 $f(a)$ の割り当て (関数 $f\colon A \to \mathbb{R}$) で
次の 2 つを満たすもの

1. s, t 以外の頂点 $v \in V - \{s, t\}$ に対して，(流量保存制約)

$$\sum_{u:(u,v)\in A} f((u,v)) = \sum_{u:(v,u)\in A} f((v,u))$$

(v へ流入する総量)　(v から流出する総量)



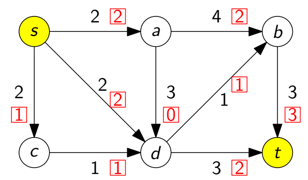
流れとは？ (2)

定義：s から t へ至る流れとは？

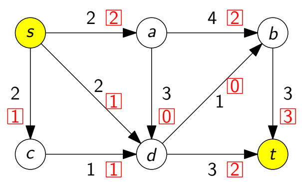
各弧 $a \in A$ に対する実数 $f(a)$ の割り当て (関数 $f\colon A \to \mathbb{R}$) で
次の 2 つを満たすもの

2. 各弧 $a \in A$ において，(容量制約)

$$0 \leq f(a) \leq c(a)$$

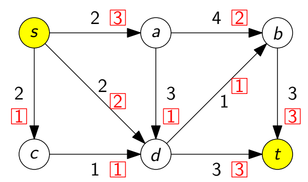


これは流れか？ (1)



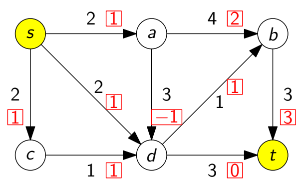
流れではない

これは流れか？ (2)



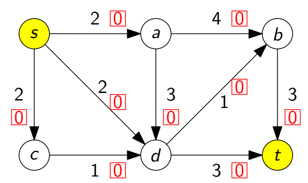
流れではない

これは流れか？ (3)



流れではない

これは流れか？ (4)



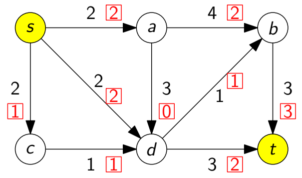
流れである

流れの値

定義：流れ f の値とは？

s から t へ至る流れ f の値を次の量で定義し，$\texttt{val}(f)$ と表記する

$$\texttt{val}(f) = \sum_{u:(s,u)\in A} f((s,u)) - \sum_{u:(u,s)\in A} f((u,s))$$

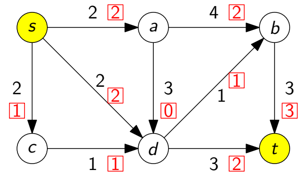


この流れの値は 5

最大流

定義：最大流とは？

s から t へ至る流れ f が最大流であるとは，
s から t へ至る任意の流れ f' に対して $\texttt{val}(f') \leq \texttt{val}(f)$ が成り立つこと



注：最大流が存在する，ということは当たり前ではない

記法の簡略化：流入，流出，純流入，純流出

s から t へ至る流れ $f \colon A \to \mathbb{R}$

記法と用語

各頂点 $v \in V$ に対して，次のように記号を定義

- $f^+(v) = \sum_{u:(v,u)\in A} f((v,u))$ （v からの流出）
- $f^-(v) = \sum_{u:(u,v)\in A} f((u,v))$ （v への流入）

このとき，

- $f^+(v) - f^-(v)$ は v における純流出
- $f^-(v) - f^+(v)$ は v における純流入

$f^+(v) - f^-(v)$ を $\partial f(v)$ と書いて，f の v における境界と呼ぶことがある

記法の簡略化：流れの定義と流れの値の定義の書き換え

s から t へ至る流れ $f \colon A \to \mathbb{R}$

つまり，次のように書き換えられる

流量保存制約

- 任意の頂点 $v \in V - \{s,t\}$ に対して，$f^+(v) = f^-(v)$

流れ f の値

- $\texttt{val}(f) = f^+(s) - f^-(s)$

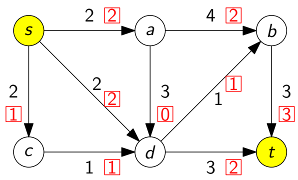
流れの総和 ＝ 流出量の総和 ＝ 流入量の総和

s から t へ至る流れ $f \colon A \to \mathbb{R}$

性質 1：次が成り立つ

$$\sum_{a\in A} f(a) = \sum_{v\in V} f^+(v) = \sum_{v\in V} f^-(v)$$

証明：演習問題 (ヒント：握手補題の証明を思い出す)



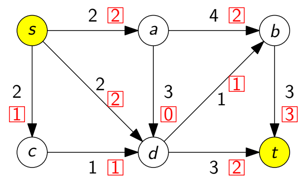
v	$f^+(v)$	$f^-(v)$
s	5	0
a	2	2
b	3	3
c	1	1
d	3	3
t	0	5
計	14	14

s における純流出 ＝ t における純流入

性質 2：次が成り立つ

s から t へ至る任意の流れ $f \colon A \to \mathbb{R}$ に対して

$$\underbrace{f^+(s) - f^-(s)}_{(s\text{ における純流出})} = \underbrace{f^-(t) - f^+(t)}_{(t\text{ における純流入})}$$



左辺 ＝ 5 ＝ 右辺

s における純流出 ＝ t における純流入：証明

流量保存制約

- 任意の頂点 $v \in V - \{s,t\}$ に対して，$f^+(v) = f^-(v)$

から，

- $\sum_{v\in V-\{s,t\}} f^+(v) = \sum_{v\in V-\{s,t\}} f^-(v)$ .... (1)

が得られる．また，性質 1 より，

- $\sum_{v\in V} f^+(v) = \sum_{v\in V} f^-(v)$ .... (2)

となるので，式 (2) − 式 (1) より，

- $f^+(s) + f^+(t) = f^-(s) + f^-(t)$

が得られる．整理すると

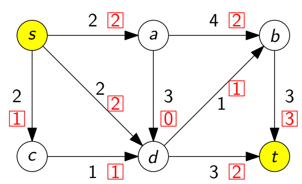
- $f^+(s) - f^-(s) = f^-(t) - f^+(t)$

が得られる． □

最大流問題が出てくる場面：配送問題

- 有向グラフは 道路ネットワーク をモデル化
- s は 部品工場 をモデル化
- t は 組立工場 をモデル化
- 弧の容量は 道幅 をモデル化

最大流問題 ＝ できるだけ多くの部品を組み立て工場に運ぶには？



他の応用は後の講義で

補足：線形計画法との関連

『オペレーションズ・リサーチ基礎』履修者用の補足

最大流問題は線形計画問題としてモデル化できる

最大化 $\displaystyle\sum_{u:(s,u)\in A} f((s,u)) - \sum_{u:(u,s)\in A} f((u,s))$
(線形の目的関数)

条　件 $\displaystyle\sum_{u:(u,v)\in A} f((u,v)) = \sum_{u:(v,u)\in A} f((v,u))$ $\quad \forall\, v \in V - \{s,t\}$

$0 \leq f(a) \leq c(a)$ $\quad \forall\, a \in A$
(線形の制約条件)

つまり，

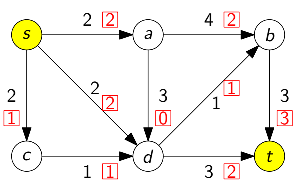
- 最大流問題には，線形計画問題の理論が適用できる
- 最大流問題は，線形計画問題に対するアルゴリズムで解ける

しかし，この視点を本講義では追い求めない ($\rightsquigarrow$『数理計画法』)

目次

1 最大流問題とは？
2 流れとカットの弱双対性
3 流れとカットの強双対性：最大流最小カット定理
4 今日のまとめ

疑問：流れと「対」になるものは何か？



この流れが最大流であることを証明するにはどうすればよいか？

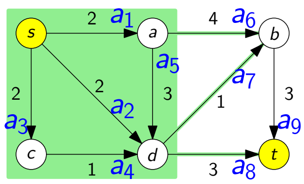
- $\rightsquigarrow$ 流れと「対」になるものが何なのか考えたい

最大化	最小化
マッチング	頂点被覆
流れ	???

カット

定義：s,t カットとは？

s,t カットとは，頂点部分集合 S で，$s \in S$ と $t \notin S$ を満たすもののこと



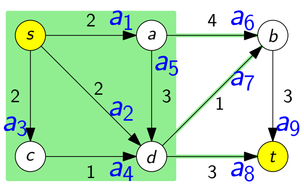
イメージ：s から t へ至る流れは S の側から $V - S$ の側に向かっていく

カットの容量

定義：s,t カットの容量とは？

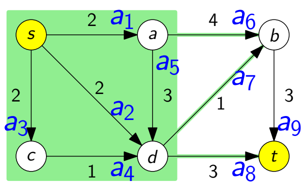
s,t カット S の容量とは，次の式で定義され，$\mathrm{cap}(S)$ と表記する

$$\mathrm{cap}(S) = \sum_{(u,v)\in A: u\in S, v\notin S} c((u,v))$$



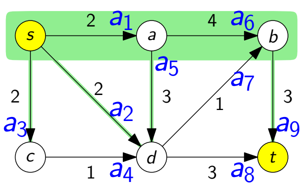
S に始点を持ち，$V - S$ に終点を持つ弧の容量の合計

カット容量の例 (1)



$\{s,a,c,d\}$ は s,t カットで，その容量は 8

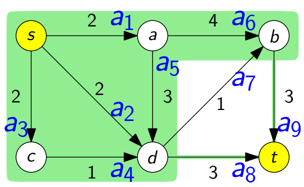
カット容量の例 (2)



$\{s,a,b\}$ は s,t カットで，その容量は 10

注意：a_7 の容量はカットの容量に含めない

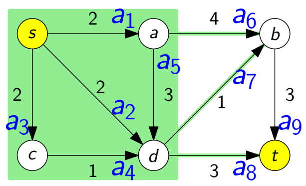
カット容量の例 (3)



$\{s,a,b,c,d\}$ は s,t カットで，その容量は 6

注意：a_7 の容量はカットの容量に含めない

カットの容量と流れ



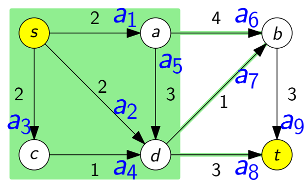
直感
- s から t へ至る流れ f は S から $V - S$ へ向かっていく
- $\therefore$ $\mathtt{cap}(S)$ よりもたくさん s から t へ流れない
- $\therefore$ $\mathtt{val}(f) \leq \mathtt{cap}(S)$

カットの容量と流れ：より厳密に

性質 3：流れとカットの関係

s から t へ至る任意の流れ f と任意の s,t カット S に対して

$$\mathtt{val}(f) \leq \mathtt{cap}(S)$$



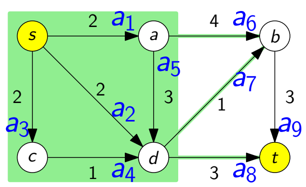
カットの容量と流れ：補題

補題 A

s から t へ至る任意の流れ f と任意の s,t カット S に対して

$$\mathtt{val}(f) = \underbrace{\sum_{(u,v)\in A: u\in S, v\notin S} f((u,v))}_{(S\text{ から出る総流量})} - \underbrace{\sum_{(u,v)\in A: u\notin S, v\in S} f((u,v))}_{(S\text{ に入る総流量})}$$

証明：演習問題



カットの容量と流れ：証明

証明したいこと：流れとカットの関係

s から t へ至る任意の流れ f と任意の s,t カット S に対して

$$\mathtt{val}(f) \leq \mathtt{cap}(S)$$

証明：

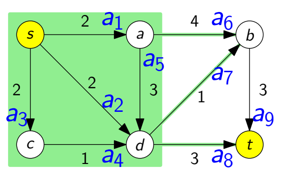
$$\begin{aligned}
\mathtt{val}(f) &\overset{(\text{補題 A})}{=} \sum_{(u,v)\in A: u\in S, v\notin S} f((u,v)) - \sum_{(u,v)\in A: u\notin S, v\in S} f((u,v)) \\
&\leq \sum_{(u,v)\in A: u\in S, v\notin S} f((u,v)) && \because f((u,v)) \geq 0 \\
&\leq \sum_{(u,v)\in A: u\in S, v\notin S} c((u,v)) && \because f((u,v)) \leq c((u,v)) \\
&= \mathtt{cap}(S)
\end{aligned}$$

□

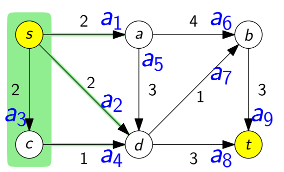
最小カット

定義：最小 s,t カットとは？

最小 s,t カットとは，s,t カット S で，
任意の s,t カット S' に対して，$\mathtt{cap}(S) \leq \mathtt{cap}(S')$ を満たすもの



最小 s,t カットではない



最小 s,t カットである

流れとカットの関係：帰結

有向グラフ $G = (V, A)$，容量 $c \colon A \to \mathbb{R}$，2 頂点 $s, t \in V$

流れとカットの関係 (重要)

f が流れ
S が s,t カット $\Rightarrow \mathtt{val}(f) \leq \mathtt{cap}(S)$

最大流とカットの関係

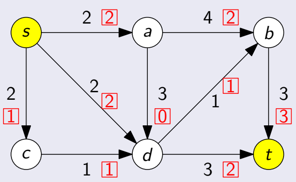
f が最大流
S が s,t カット $\Rightarrow \mathtt{val}(f) \leq \mathtt{cap}(S)$

最大流と最小カットの関係 (弱双対性)

f が最大流
S が最小 s,t カット $\Rightarrow \mathtt{val}(f) \leq \mathtt{cap}(S)$

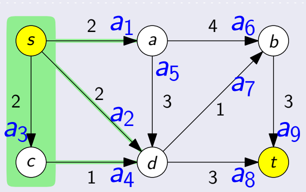
弱双対性の使い方

下界 (かかい)



最大流の値 ≥ 5

上界

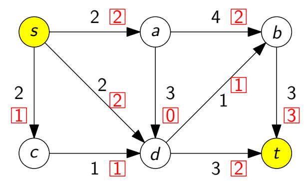


最大流の値 ≤ 5

したがって

- 左の図にある流れは最大流であり，その値は 5
- 右の図にある s,t カットは最小 s,t カットであり，その容量は 5

疑問：流れと「対」になるものは何か？ — 解答編



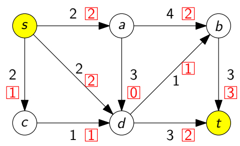
この流れが最大流であることを証明するにはどうすればよいか？
- ⇝ 流れと「対」になるものが何なのか考えたい
- ⇝ それは s,t カット !!!

最大化	最小化
マッチング	頂点被覆
流れ	s,t カット

目次

1. 最大流問題とは？
2. 流れとカットの弱双対性
3. 流れとカットの強双対性：最大流最小カット定理
4. 今日のまとめ

疑問：流れと「対」になるものは何か？ — 解答編 (再)



この流れが最大流であることを証明するにはどうすればよいか？
- ⇝ 流れと「対」になるものが何なのか考えたい
- ⇝ それは s, t カット !!!

問題点？

$\mathtt{val}(f) = \mathtt{cap}(S)$ となる f と S が存在しないかもしれない？

解決 ⇝ (最大流最小カット定理)

$\mathtt{val}(f) = \mathtt{cap}(S)$ となる f と S が必ず存在する !!

最大流最小カット定理

最大流最小カット定理 (強双対性)　(Ford, Fulkerson '56)

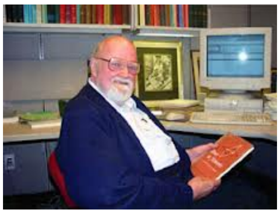
f が最大流
S が最小 s, t カット　$\Rightarrow \mathtt{val}(f) = \mathtt{cap}(S)$

注意

弱双対性
- $\mathtt{val}(f) = \mathtt{cap}(S)$ ならば f は最大流，S は最小 s, t カット

強双対性
- $\mathtt{val}(f) = \mathtt{cap}(S)$ となる f, S が必ず存在

Lester R. Ford, Jr. と Delbert R. Fulkerson



L. R. Ford, Jr.
フォード
(1927–)

D. R. Fulkerson
ファルカーソン
(1924–1976)

https://arodrigu.webs.upv.es/grafos/doku.php?id=algoritmo_ford_fulkerson

最大流最小カット定理 — 証明に向けて

性質：最大流最小カット定理 (強双対性)　(Ford, Fulkerson '56)

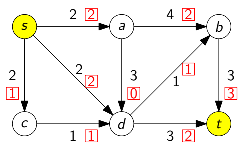
f が最大流
S が最小 s, t カット　$\Rightarrow \mathtt{val}(f) = \mathtt{cap}(S)$

この講義では容量が整数の場合のみ証明する
- 容量が無理数の場合の証明は，この講義の範囲を超える (最後に補足)

証明法：アルゴリズムによる証明

最大流問題の解き方

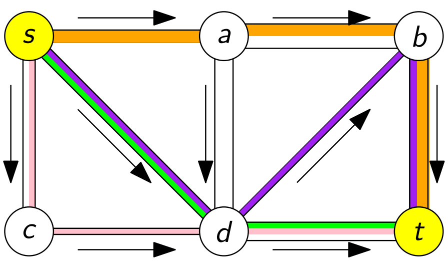
1. 線形計画問題としてモデル化し，線形計画法のアルゴリズムを使う (⇝『数理計画法』)
2. 最大流問題独自のアルゴリズムを利用する (特に，増加道法を紹介する)



今からやること

増加道法を説明する
- 重要概念：補助ネットワーク，増加道

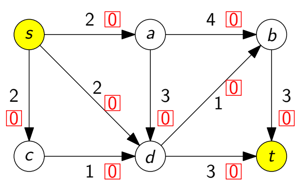
増加道法：基本アイディア



- 事実：「流れ」は「道に沿った流れ」に分解できる
- 方針：「道に沿った流れ」を次々と見つけていく

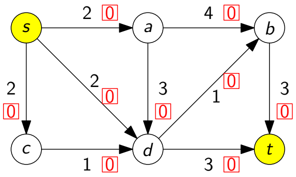
増加道法の動き (1)

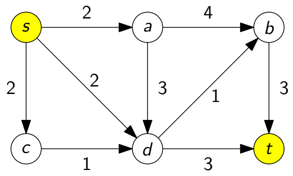
任意の流れから始める (例えば，どの弧の上にも 0 だけ流れるもの)



増加道法の動き (1)：補助ネットワークの作成

補助ネットワークを作る (残余ネットワークとも呼ばれる)

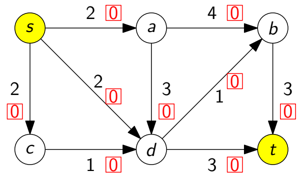

元のネットワーク

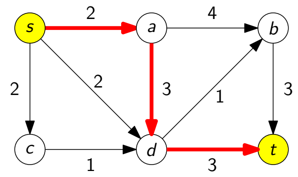

補助ネットワーク

この場合は，始めのグラフと同じ
(次から変わるので，定義はそこで説明)

増加道法の動き (1)：増加道の発見

補助ネットワークにおいて，s を始点，t を終点とする道を見つける

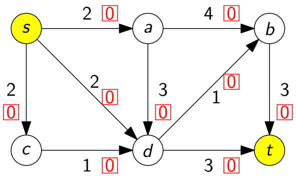

元のネットワーク

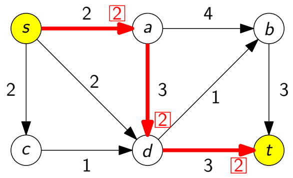

補助ネットワーク

このような道を増加道 (ぞうかどう) と呼ぶ

増加道法の動き (1)：流れの増加

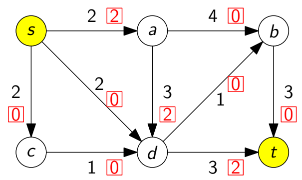
道に沿って，できる限り流れを増加させる


元のネットワーク


補助ネットワーク

増加道法の動き (2)

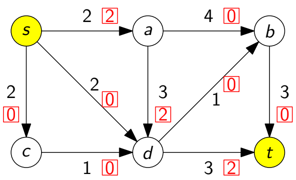
現在得られている流れ

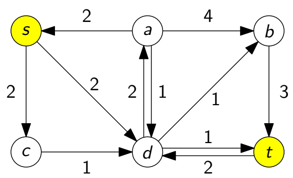


先ほどの手順を繰り返す
- 補助ネットワークの作成
- 増加道の発見
- 流れの増加

増加道法の動き (2)：補助ネットワークの作成

補助ネットワークを作る


元のネットワーク


補助ネットワーク

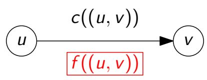
直感：補助ネットワークとは？
- 頂点集合はもとの有向グラフと同じ
- 2 頂点間に弧がある ⇔ その弧を通してまだ流せる (逆向き弧に注意)
- 弧の容量 ＝ 流せる最大量

補助ネットワーク：定義

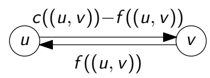
有向グラフ $G = (V, A)$，容量 $c \colon A \to \mathbb{R}$，2 頂点 s, t

定義：流れ f に対する補助ネットワークとは？

流れ f に対する補助ネットワークは次で定義される
- 有向グラフ $G_f = (V, A_f)$，$A_f = A_f^{\mathrm{F}} \cup A_f^{\mathrm{B}}$
  - $A_f^{\mathrm{F}} = \{(u, v) \mid (u, v) \in A, f((u, v)) < c((u, v))\}$ (順向きの弧集合)
  - $A_f^{\mathrm{B}} = \{(v, u) \mid (u, v) \in A, f((u, v)) > 0\}$ (逆向きの弧集合)
- 容量 $c_f \colon A_f \to \mathbb{R}$
  - $(u, v) \in A_f^{\mathrm{F}}$ のとき，$c_f((u, v)) = c((u, v)) - f((u, v))$
  - $(v, u) \in A_f^{\mathrm{B}}$ のとき，$c_f((v, u)) = f((u, v))$



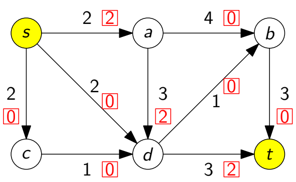
元のネットワーク

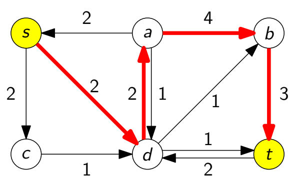


補助ネットワーク

増加道法の動き (2)：増加道の発見

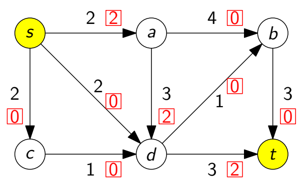
補助ネットワークにおいて，s を始点，t を終点とする道を見つける

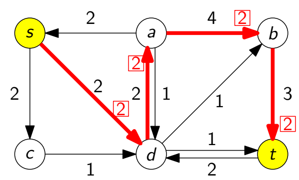

元のネットワーク


補助ネットワーク

増加道法の動き (2)：流れの増加

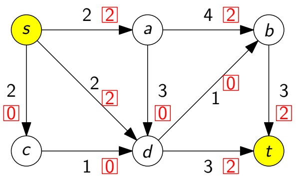
道に沿って，できる限り流れを増加させる


元のネットワーク


補助ネットワーク

増加道法の動き (3)

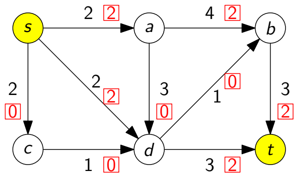
現在得られている流れ



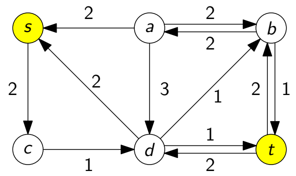
先ほどの手順を繰り返す
- 補助ネットワークの作成
- 増加道の発見
- 流れの増加

増加道法の動き (3)：補助ネットワークの作成

補助ネットワークを作る



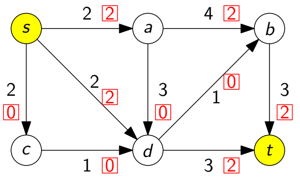
元のネットワーク



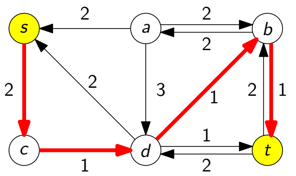
補助ネットワーク

増加道法の動き (3)：増加道の発見

補助ネットワークにおいて，s を始点，t を終点とする道を見つける



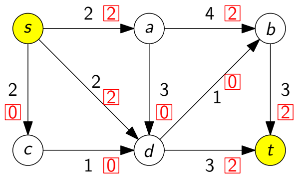
元のネットワーク



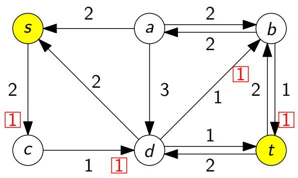
補助ネットワーク

増加道法の動き (3)：流れの増加

道に沿って，できる限り流れを増加させる



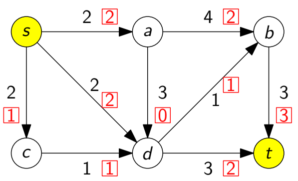
元のネットワーク



補助ネットワーク

増加道法の動き (4)

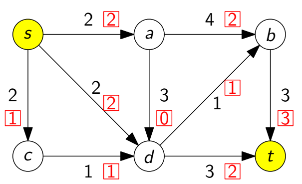
現在得られている流れ



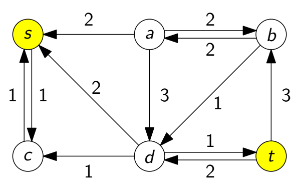
先ほどの手順を繰り返す
- 補助ネットワークの作成
- 増加道の発見
- 流れの増加

増加道法の動き (4)：補助ネットワークの作成

補助ネットワークを作る



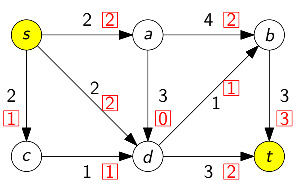
元のネットワーク



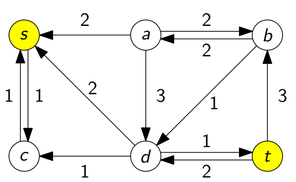
補助ネットワーク

増加道法の動き (4)：増加道の発見

補助ネットワークにおいて，s を始点，t を終点とする道を見つける



元のネットワーク

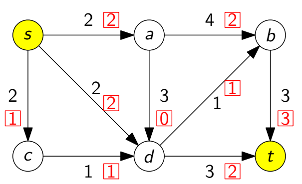


補助ネットワーク

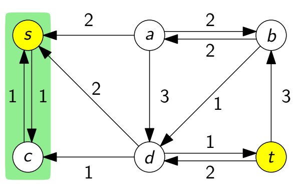
しかし，見つからない！ (存在しない) ⇝ アルゴリズムは次の段階へ

増加道法の動き (4)：到達可能頂点の探索

補助ネットワークにおいて，s から到達可能な頂点をすべて見つける



元のネットワーク



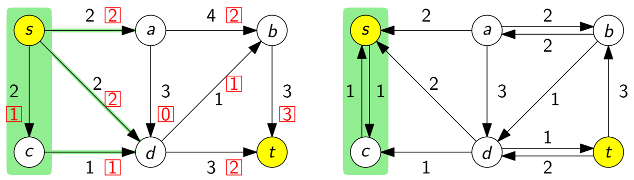
補助ネットワーク

$$S = \left\{ v \in V \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{補助ネットワークにおいて，} s \text{ を始点として，} \\ v \text{ を終点とする道が存在する} \end{array} \right\}$$

⇝ この S は s, t カットである (なぜか？)

増加道法の動き (4)：最小カットの発見

元の有向グラフにおいて，この s,t カット S の容量 $\mathrm{cap}(S)$ を見る



元のネットワーク　　　補助ネットワーク

⇝ この容量 $\mathrm{cap}(S)$ は得られた流れの値に等しい

- つまり，最大流と最小 s,t カットが得られた！（アルゴリズム停止）

増加道法：動きのまとめ

有向グラフ $G=(V,A)$，容量 $c\colon A\to\mathbb{R}$，2 頂点 s,t

アルゴリズム：増加道法

初期化：流れ $f:=0$

1. f に対する補助ネットワーク (G_f と c_f) を作る
2. G_f において s を始点，t を終点とする道を見つける
3. 存在するとき，その道に沿って流れを増加させ，1 に戻る
4. 存在しないとき，f を出力

今から証明すること

- 正当性：増加道法が停止したとき，最大流を出力すること
- 停止性：増加道法が必ず停止すること

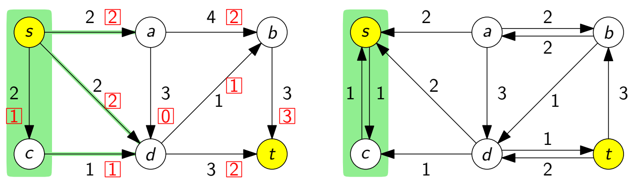
注：とりあえず，アルゴリズムの「効率性」は無視

格言

アルゴリズムで証明すべきこと：正当性，停止性，効率性

増加道法の正当性：例

なぜ，これが最大流なのか？



元のネットワーク　　　補助ネットワーク

- 補助ネットワークにおいて，S から出ていく弧は存在しない
- S から出る総流量 $=5$ なので，$\mathtt{val}(f)\geq 5$
- 一方で，$\mathrm{cap}(S)=5$．つまり，$\mathtt{val}(f)\leq 5$
- $\therefore\ \mathtt{val}(f)=5$ であり，$\mathrm{cap}(S)=5$

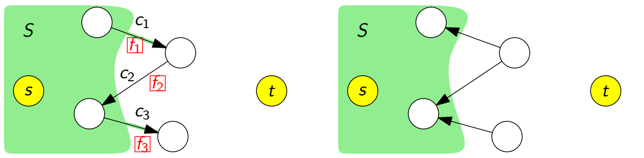
増加道法の正当性：証明 (1)

性質：増加道法の正当性

増加道法が停止したとき，その出力 f は最大流である

証明：増加道法が停止したときの状況を考える

- 出力 f に対する補助ネットワークにおいて，s を始点とする有向道の終点全体の集合を S とする
- S は s,t カットである　（なぜか？）
- つまり，補助ネットワークの弧 $(u,v)\in A_f$ で $u\in S$ かつ $v\notin S$ となるものは存在しない

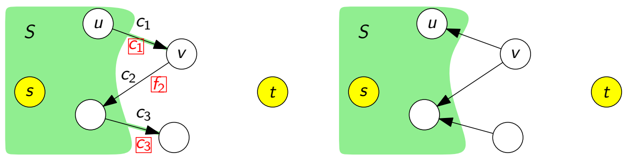


元のネットワーク　　　補助ネットワーク

増加道法の正当性：証明 (2)

元のネットワークの弧 $(u,v)\in A$ で $u\in S, v\notin S$ であるものを考える

- $(u,v)\notin A_f$ であるので，特に $(u,v)\notin A_f^{\mathrm{F}}$
- $(u,v)\notin A_f^{\mathrm{F}}$ より，$f((u,v))=c((u,v))$

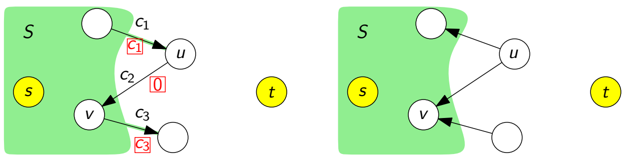


元のネットワーク　　　補助ネットワーク

増加道法の正当性：証明 (3)

元のネットワークの弧 $(u,v)\in A$ で $u\notin S, v\in S$ であるものを考える

- $(v,u)\notin A_f$ であるので，特に $(v,u)\notin A_f^{\mathrm{B}}$
- $(v,u)\notin A_f^{\mathrm{B}}$ より，$f((u,v))=0$



元のネットワーク　　　補助ネットワーク

増加道法の正当性：証明 (4)

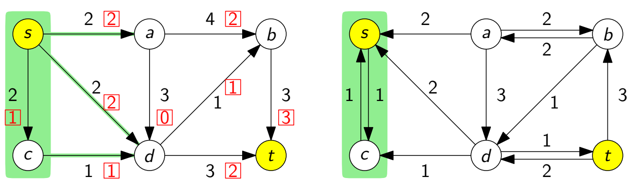
以上をまとめると

$$
\begin{aligned}
\mathtt{val}(f) &\overset{(\text{補題 A})}{=} \sum_{(u,v)\in A: u\in S, v\notin S} f((u,v)) - \sum_{(u,v)\in A: u\notin S, v\in S} f((u,v))\\
&= \sum_{(u,v)\in A: u\in S, v\notin S} c((u,v)) - \sum_{(u,v)\in A: u\notin S, v\in S} 0\\
&= \sum_{(u,v)\in A: u\in S, v\notin S} c((u,v))\\
&= \mathrm{cap}(S)
\end{aligned}
$$

つまり，$\mathtt{val}(f)=\mathrm{cap}(S)$ となり，弱双対性より，f は最大流，S は最小 s,t カットである □

増加道法の停止性：略証

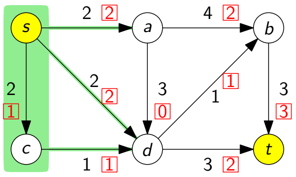
なぜ増加道法は停止するのか？

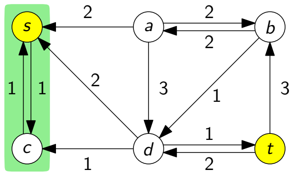


- 容量は整数なので，最小 s,t カットの容量も整数
- 容量は整数なので，補助ネットワークの容量も 1 以上の整数
- $\therefore$ 反復が行われる度に，流れの値は 1 以上増える
- $\therefore$ 反復回数は高々最小 s,t カットの容量で，これは有限 □

整数流定理

- つまり，容量が整数であるならば，出力される最大流も整数





整数流定理 (重要)

すべての弧の容量が整数 ⇒ どの弧に流れる量も整数である最大流が存在

最大流の値が整数であり，なおかつ，どの弧に流れる量も整数

増加道法に対する注意

注意 1

弧の容量に無理数が出てくるとき，

- 増加道法が有限ステップで終了しないこともある
- 増加道法の収束先が最大流ではないこともある
- その 2 つが同時に起こることもある

注意 2

増加道法における，増加道の選び方は工夫できる

- 工夫しない　(Ford-Fulkerson のアルゴリズム)
- 幅優先探索を用いる　(Edmonds-Karp のアルゴリズム)

Edmonds-Karp のアルゴリズムは多項式時間アルゴリズムである
(Ford-Fulkerson のアルゴリズムはそうではない)

目次

1 最大流問題とは？

2 流れとカットの弱双対性

3 流れとカットの強双対性：最大流最小カット定理

4 今日のまとめ

今日のまとめ

今日の目標

最大流問題に関して次ができるようになる

- 「流れ」が何であるのか記述でき，基本性質を証明できる
- 流れとカットの双対性により流れの最大性を証明できる

重要な定理

- 最大流最小カット定理
- 整数流定理

次回予告

最大流を用いた数理モデル化