グラフとネットワーク　第 5 回
マッチング：モデル化

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2019 年 5 月 24 日

最終更新：2019 年 5 月 27 日　11:26

スケジュール 前半 (予定)

1. グラフの定義と次数：数理 (4/12)
2. 道と閉路：数理 (4/19)
3. 木：数理 (4/26)
- ∗ 休み (5/3)
- ∗ 休講 (5/10)
4. マッチング：数理 (5/17)
5. マッチング：モデル化 (5/24)
6. 最大流：数理 (5/31)
- 中間試験 (6/7)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

7. 最大流：モデル化 (1) — 割当 (6/14)
8. 最大流：モデル化 (2) — カットの視点 (6/21)
9. 連結性：数理とモデル化 (6/28)
10. 彩色：数理 (7/5)
11. 彩色：モデル化 (7/12)
12. 平面グラフ：数理 (7/19)
13. 平面グラフ：モデル化 (7/26)
14. (授業等調整日) (8/2)
- 期末試験 (8/9？)

注意：予定の変更もありうる

中間試験

- 日時，教室：6 月 7 日 (金) 13:00–14:30 @ 西 2 号館 101 教室
- 出題範囲
  - 第 1 回講義スライドの最初から第 5 回講義スライドの最後まで
- 出題形式
  - 演習問題と同じ形式の問題を 4 題出題する
  - その中の 2 題以上は演習問題として提示されたものと同一である (ただし,「発展」として提示された演習問題は出題されない)
  - 全問に解答する
- 配点：1 題 15 点満点，計 60 点満点
- 時間：90 分
- 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

概要 (第 1 回講義より)

主題

離散最適化の入門として，次を概説する
- グラフとネットワークを用いた数理モデル化
- アルゴリズム的解法の背後にある数理

キャッチフレーズ：「本当の離散数学がここから始まる」

達成目標

以下の 4 項目をすべて達成すること
1. グラフやネットワークに関する用語を正しく使うことができる
2. 現実世界の諸問題をグラフやネットワークで表現し，数理モデルを構築できる
3. アルゴリズム的解法の背後にある数理，特に，最小最大定理の重要性を説明でき，それを用いて最適性の証明ができる
4. グラフとネットワークに関する簡単な数学的事実を証明できる

数理モデルの構築 と 応用

格言
- 「応用」ということばの意味は非常にあいまい
- 「応用」というときは，学問の階層を意識する

- 研究には段階がある
- 基礎研究の応用先は別の基礎研究かもしれない
- 基礎研究の応用先は応用研究かもしれない
- 応用研究の応用先は別の応用研究かもしれない
- 応用研究の応用先は基礎研究かもしれない
- 「応用」は実世界応用を意味しないかもしれない

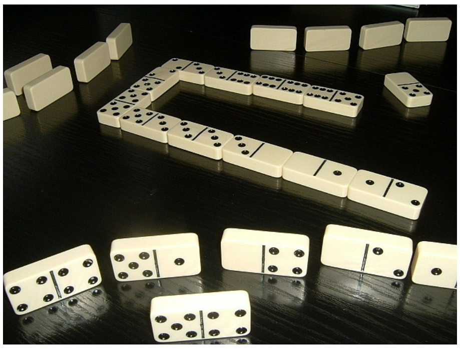
概要

今日の目標

二部グラフの完全マッチングを使って問題を解決する例を見る
- ドミノ・タイリング
- トランプ・マジック？
- 四目並べ

目次

ドミノ

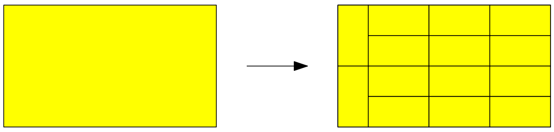


https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dominospiel.JPG

ドミノ・タイリング

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dominoes_tiles.jpg

ドミノ・タイリング：問題



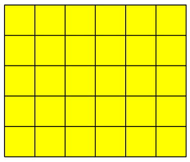
考えたい問題

与えられた盤面をドミノ牌で敷き詰められるか？

タイリング ＝ 敷き詰め

ドミノ・タイリング：例 1

この盤面はドミノ牌で敷き詰められるか？

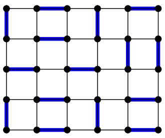


簡単な考察

敷き詰められるならば，マス目の沿って敷き詰めないといけない

ドミノ・タイリング：例 1

グラフとしてモデル化



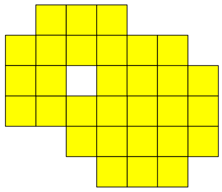
分かること

考えている盤面をドミノ牌で敷き詰め可能 $\Leftrightarrow$
このように構成したグラフに完全マッチングが存在

$\boxed{\text{注}}$：このように構成したグラフは二部グラフ

ドミノ・タイリング：例 2

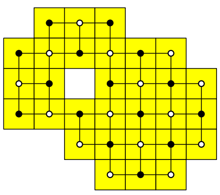
この盤面はドミノ牌で敷き詰められるか？



敷き詰められることを示すには？　→　敷き詰め方を見つければよい
敷き詰められないことを示すには？　→　?????

ドミノ・タイリング：例 2

グラフとしてモデル化

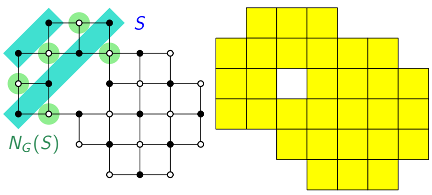


分かること (再掲)

考えている盤面をドミノ牌で敷き詰め可能 $\Leftrightarrow$
このように構成したグラフに完全マッチングが存在

ドミノ・タイリング：例 2

完全マッチングは存在するか？



$|S| = 6 > 5 = |N_G(S)|$

Hall の結婚定理

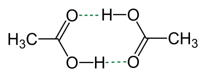
二部グラフ G が完全マッチングを持つ (部集合は A, B) $\Leftrightarrow$
任意の $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N_G(S)|$

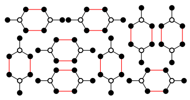
$\therefore$ この盤面はドミノ牌で敷き詰められない！

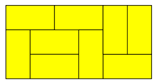
動機：なぜドミノ・タイリングを考えるのか？

統計力学からの動機

二量体モデル







https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Acetic_Acid_Hydrogenbridge_V.1.svg

統計力学で行いたいこと

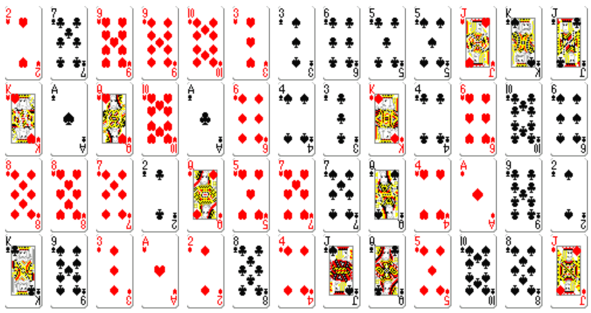
ドミノ・タイリングの総数計算

- ドミノ・タイリングが存在しない ⇔ ドミノ・タイリングの総数 = 0

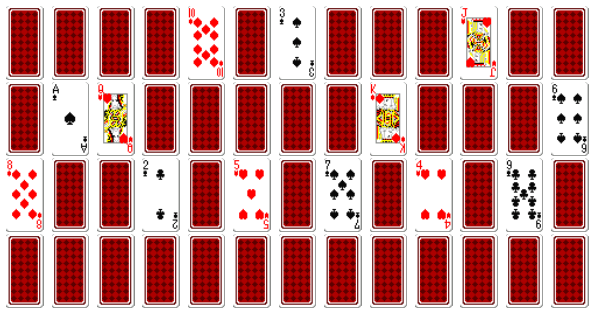
⇝ 『離散数理工学』

目次

トランプ・マジック？



トランプ・マジック？ (続)



トランプ・マジック (？) のからくり

命題

トランプのカード 52 枚を 4 枚ずつ 13 個の組へ任意に分けたとき，
各組から 1 枚ずつカードをうまく選ぶと，
A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K を 1 つずつ取り出せる

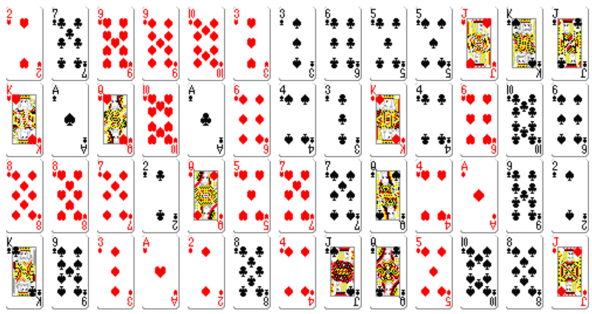
Hall の結婚定理を使って，この命題を証明する

考えなくてはならないこと

どのようにマッチングを使うのか？

⇝ グラフを使って，問題をモデル化する

トランプ・マジック (？) のからくり：グループの導入



a b c d e f g h i j k l m

トランプ・マジック (？) のからくり：二部グラフ G の構成 (1)

13 個のグループを表す頂点 (a から m まで)

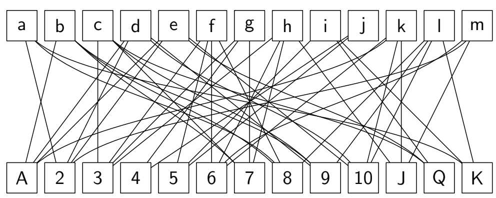
| a | b | c | d | e | f | g | h | i | j | k | l | m |

| A | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | J | Q | K |

13 個のカードのランクを表す頂点 (A から K まで)

トランプ・マジック (？) のからくり：二部グラフ G の構成 (2)

各グループとカードのランクの組に対して，



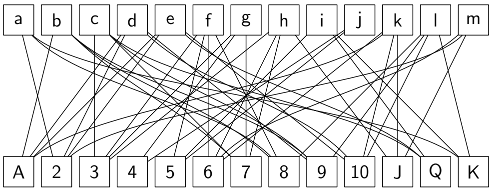
そのグループがそのランクのカードを含んでいれば辺を引く
そうでないときは辺を引かない

- A = グループに対応する頂点の集合
- B = カードのランクに対応する頂点の集合

この二部グラフを G とする

トランプ・マジック（？）のからくり：Hall の結婚定理

Hall の結婚定理を使いたい

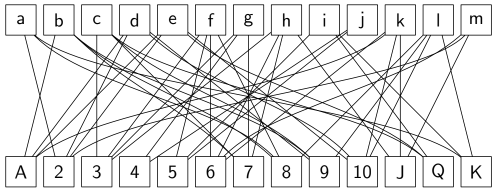


Hall の結婚定理

G が完全マッチングを持つ $\Leftrightarrow$
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N_G(S)|$

トランプ・マジック（？）のからくり：条件の確認

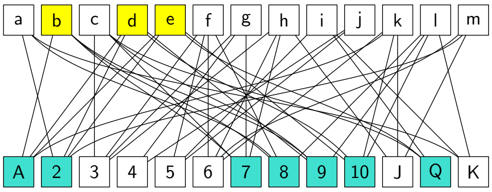
任意の $S \subseteq A$ を考える



- S はグループの集合に対応
- $N_G(S)$ は S に属するグループに含まれるカードのランクに対応

トランプ・マジック（？）のからくり：条件の確認 (続き)

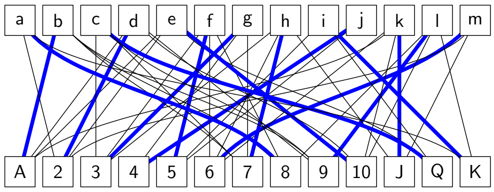
任意の $S \subseteq A$ を考える



- S に属するグループに含まれるカードの数は $4|S|$
- $N_G(S)$ に対応するランクのカードの数は $4|N_G(S)|$
- 背理法：$|S| > |N_G(S)|$ だと仮定すると，
  $|S|$ 個のグループを $N_G(S)$ に対応するランクのカードだけで作れない
- よって，$|S| \leq |N_G(S)|$ でないといけない

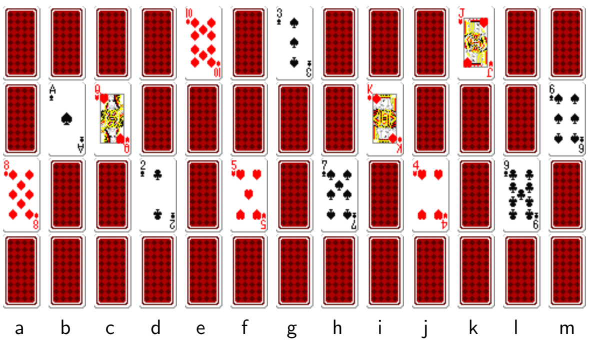
トランプ・マジック（？）のからくり：条件の確認 (続き)

つまり，結婚条件が必ず成り立つ．



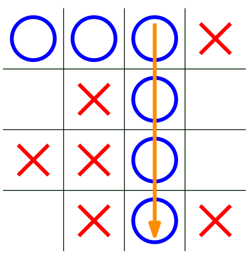
- つまり，完全マッチングが存在する
- そこから，各グループでどのカードを選べばよいかが分かる $\square$

トランプ・マジック？: 確認



目次

四目並べ

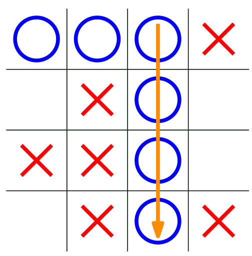


「斜め」は考えないとする

四目並べで後手は負けない

命題：四目並べの必勝戦略

後手は必ず引き分けに持ち込める (負けない)

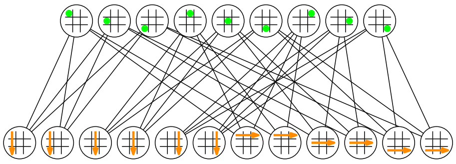


証明：Hall の結婚定理を使う

四目並べで後手は負けない：二部グラフ G の構成

2 種類の頂点
- マス頂点：盤面の各マスに対応
- 列頂点：盤面の各列 (横と縦) に対応，各列に対して 2 つずつ

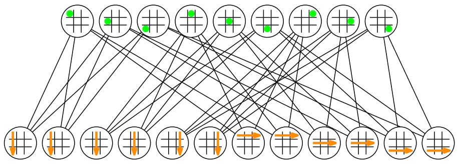
マス頂点と列頂点の間に辺を引くのは
- 対応するマスが対応する列に含まれるとき



三目並べのときの例

四目並べで後手は負けない：二部グラフ G の性質

2 種類の頂点
- マス頂点
  - 総数 $= 16$
  - 次数 $= 4$ ($\because$ 各マスは 2 つの列に含まれるから)
- 列頂点
  - 総数 $= 8 \times 2 = 16$
  - 次数 $= 4$ ($\because$ 各列はマスを 4 つ含むから)



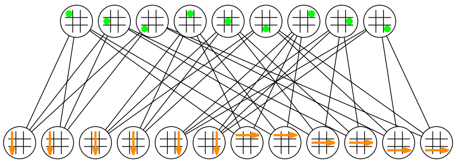
三目並べのときの例

四目並べで後手は負けない：Hall の定理の適用 (1)

まず示すこと

このグラフ G には，完全マッチングが存在する

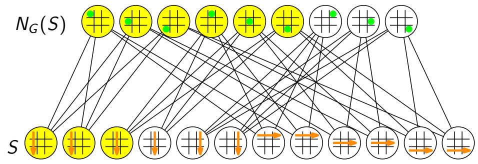
Hall の定理を使って証明する



三目並べのときの例

四目並べで後手は負けない：Hall の定理の適用 (2)

列頂点を任意にいくつか選んで，S という頂点集合を作る
- 示したいこと：$|S| \leq |N_G(S)|$
- S と $N_G(S)$ の間の隣接関係で，数え上げを行う



三目並べのときの例

四目並べで後手は負けない：Hall の定理の適用 (3)

$$
N_G(S)
$$
$$
S \quad \begin{array}{c|ccccc|c}
 & v_1 & v_2 & & & v_h & \\
\hline
u_1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & = 4 \\
u_2 & 1 & & 1 & 1 & 1 & = 4 \\
 & 1 & & 1 & 1 & 1 & = 4 \\
u_k & 1 & 1 & 1 & 1 & & = 4 \\
\hline
 & \geq 4 & \geq 4 & \geq 4 & \geq 4 & \geq 4 &
\end{array}
$$

$u \in S$ と $v \in N_G(S)$ が隣接するなら「1」
そうでないときは「0」

- 各 $u \in S$ に対応する行の成分和 $= \deg_G(u) = 4$
- 各 $v \in N_G(S)$ に対応する列の成分和 $\leq \deg_G(v) = 4$

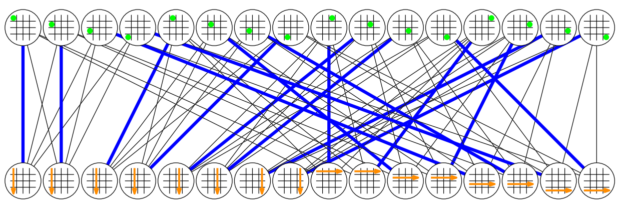
- $\therefore 4|S| =$ この行列の成分和 $\leq 4|N_G(S)|$
- $\therefore |S| \leq |N_G(S)|$

四目並べで後手は負けない：Hall の定理の適用 (4)

今示したこと

このグラフ G には，完全マッチングが存在する

そのようなマッチング M を考える
- 1 つの列に対応する列頂点は 2 つ存在し，
  M を通して，2 つのマス頂点と結ばれている



四目並べのときの例

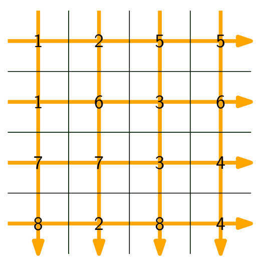
四目並べで後手は負けない：ペアの作成

- 1 つの列に対応する列頂点は 2 つ存在し，
  M を通して，2 つのマス頂点と結ばれている
- その 2 つのマスに同じ記号を書いておく

1	2	5	5
1	6	3	6
7	7	3	4
8	2	8	4

四目並べで後手は負けない：ペアを用いた戦略

後手の戦略
- 先手の取ったマスに書かれた記号と同じ記号のマスを取る
- 各列には同じ記号が必ず 2 つあるので，先手は勝てない □



四目並べ：まとめ

四目並べについて

証明したこと

後手は必ず引き分けに持ち込める (負けない)

演習問題

先手は必ず引き分けに持ち込める (負けない)

直感：先手は後手よりも有利

つまり (結論)

四目並べは，引き分けで終わる

d 次元 n 目並べ：未解決問題

知られていること (演習問題)

「斜めもある四目並べ」は，引き分けで終わる

知られていること

「斜めもある n 目並べ」は，引き分けで終わる (ただし，$n \geq 3$)

知られていること：3 次元

「斜めもある 3 次元 3 目並べ」は，先手が勝つ

知られていること：3 次元 (Patashnik '80)

「斜めもある 3 次元 4 目並べ」は，先手が勝つ

未解決問題：3 次元

「斜めもある 3 次元 5 目並べ」は，引き分けで終わるか？

目次

概要

今日の目標

二部グラフの完全マッチングを使って問題を解決する例を見る

- ドミノ・タイリング
- トランプ・マジック？
- 四目並べ