グラフとネットワーク　第 4 回
マッチング：数理

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2019 年 5 月 17 日

最終更新：2019 年 5 月 17 日　14:53

スケジュール 前半 (予定)

1. グラフの定義と次数：数理 (4/12)
2. 道と閉路：数理 (4/19)
3. 木：数理 (4/26)
- ∗ 休み (5/3)
- ∗ 休講 (5/10)
4. マッチング：数理 (5/17)
5. マッチング：モデル化 (5/24)
6. 最大流：数理 (5/31)
- 中間試験 (6/7)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

7. 最大流：モデル化 (1) — 割当 (6/14)
8. 最大流：モデル化 (2) — カットの視点 (6/21)
9. 連結性：数理とモデル化 (6/28)
10. 彩色：数理 (7/5)
11. 彩色：モデル化 (7/12)
12. 平面グラフ：数理 (7/19)
13. 平面グラフ：モデル化 (7/26)
14. (授業等調整日) (8/2)
- 期末試験 (8/9？)

注意：予定の変更もありうる

概要 (第 1 回講義より)

主題

離散最適化の入門として，次を概説する
- グラフとネットワークを用いた数理モデル化
- アルゴリズム的解法の背後にある数理

キャッチフレーズ：「本当の離散数学がここから始まる」

達成目標

以下の 4 項目をすべて達成すること
1. グラフやネットワークに関する用語を正しく使うことができる
2. 現実世界の諸問題をグラフやネットワークで表現し，数理モデルを構築できる
3. アルゴリズム的解法の背後にある数理，特に，最小最大定理の重要性を説明でき，それを用いて最適性の証明ができる
4. グラフとネットワークに関する簡単な数学的事実を証明できる

目次

概要

今日の目標

「マッチング」を理解する
- マッチングの定義
- 最大マッチングと極大マッチングの違い
- 最大マッチングと最小頂点被覆の関係
- 結婚定理とその意義

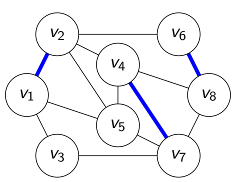
重要な概念
- 最適性の保証 (弱双対性) ⇝ 最適化の基礎

グラフにおけるマッチング

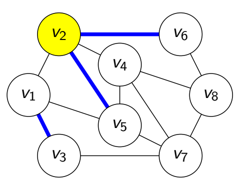
無向グラフ $G = (V, E)$

定義：マッチングとは？

G のマッチングとは辺部分集合 $M \subseteq E$ で，
M のどの 2 辺も同じ頂点に接続しないもの



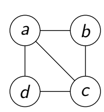
$\{\{v_1, v_2\}, \{v_4, v_7\}, \{v_6, v_8\}\}$ は
マッチングである



$\{\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_6\}\}$ は
マッチングではない

マッチングの辺 $e \in M$ は e の端点を飽和する

グラフにおけるすべてのマッチング



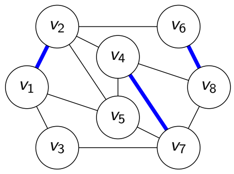
このグラフのマッチングは以下のもの
- $\emptyset$
- $\{\{a, b\}\}$
- $\{\{a, c\}\}$
- $\{\{a, d\}\}$
- $\{\{b, c\}\}$
- $\{\{c, d\}\}$
- $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$
- $\{\{a, d\}, \{b, c\}\}$

最大マッチング

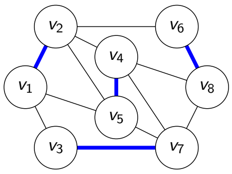
無向グラフ $G = (V, E)$

定義：最大マッチングとは？

G の最大マッチングとは G のマッチング $M \subseteq E$ で，
G の任意のマッチング M' に対して $|M| \geq |M'|$ を満たすもの



最大マッチングではない



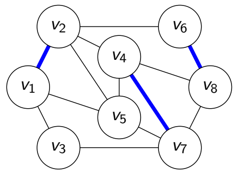
最大マッチングである

極大マッチング

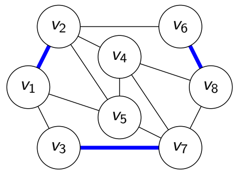
無向グラフ $G = (V, E)$

定義：極大マッチングとは？

G の極大マッチングとは G のマッチング $M \subseteq E$ で，
任意の辺 $e \in E - M$ に対して $M \cup \{e\}$ が G のマッチングではないもの



極大マッチングである



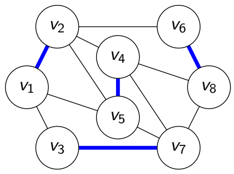
極大マッチングではない

完全マッチング

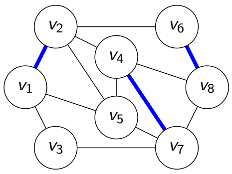
無向グラフ $G = (V, E)$

定義：完全マッチングとは？

G の完全マッチングとは G のマッチング $M \subseteq E$ で，
G の任意の頂点に M のある辺が接続しているもの



完全マッチングである



完全マッチングではない

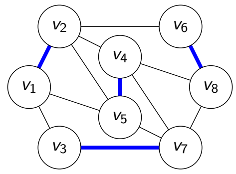
完全マッチングの辺数

無向グラフ $G = (V, E)$

性質：完全マッチングの辺数は？

$M \subseteq E$ が G の完全マッチング $\Rightarrow |V| = 2|M|$

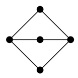
証明：演習問題 (ヒント：数え上げ論法)



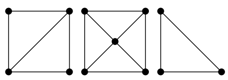
$|V| = 8, |M| = 4$

完全マッチングと最大マッチングの関係

- 完全マッチングを持たないグラフもある
  - 例えば，頂点数が奇数のグラフ



  - 例えば，頂点数が奇数の連結成分を持つグラフ



  - 頂点数が偶数である連結グラフでもそのようなものがある (演習問題)
- 完全マッチングを持つグラフにおいて，
  完全マッチングは最大マッチングである (演習問題)

最大マッチングと極大マッチングの関係

無向グラフ $G = (V, E)$

性質：最大マッチングは極大マッチングである

$M \subseteq E$ が G の最大マッチング $\Rightarrow$ M は G の極大マッチング

証明 (背理法による)：M を G の最大マッチングとする

- M が G の極大マッチングではないと仮定する
- 極大マッチングの定義より，
  ある $e \in E - M$ が存在して，$M \cup \{e\}$ は G のマッチング
- $|M \cup \{e\}| = |M| + 1 > |M|$
- これは M が最大マッチングであることに矛盾 □

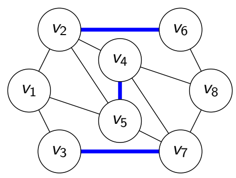
標語的なまとめ

M が完全マッチング $\Rightarrow$ M が最大マッチング $\Rightarrow$ M が極大マッチング

目次

最大マッチングをどのように見つければよい？

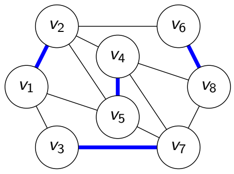
最大マッチングが見つからなかった



辺を 1 つずつ追加していくような方法では，
極大マッチングを見つけることはできるが，
最大マッチングを見つけられるとは限らない

最大性の確認法？

このマッチングが最大マッチングであることを確認するには
どうしたらよいか？



格言

発見法の前に確認法

「P $\neq$ NP 問題」と関係 $\rightsquigarrow$ 『計算理論』

最大性の確認法

格言 (再掲)

発見法の前に確認法

「P $\neq$ NP 問題」と関係 $\rightsquigarrow$ 『計算理論』

なぜ？

- 確認は発見より難しくない
- 確認法から発見法に対する道筋が見えることもある

ここからの内容：最大性の確認法

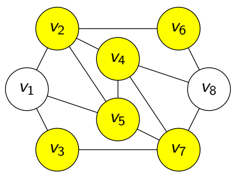
頂点被覆を用いる方法

頂点被覆

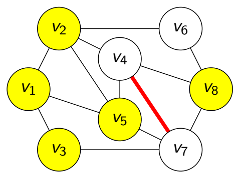
無向グラフ $G = (V, E)$

定義：頂点被覆とは？

G の頂点被覆とは頂点部分集合 $C \subseteq V$ で，
G のどの辺も C のある頂点に接続しているもの



$\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ は
頂点被覆である



$\{v_1, v_2, v_3, v_5, v_8\}$ は
頂点被覆ではない

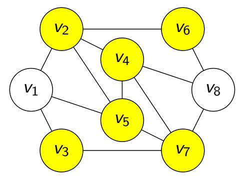
頂点被覆の頂点は，それに接続する辺を覆う (被覆する)

最小頂点被覆

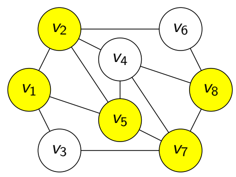
無向グラフ $G = (V, E)$

定義：最小頂点被覆とは？

G の最小頂点被覆とは頂点被覆 $C \subseteq V$ で，
G の任意の頂点被覆 C' に対して $|C| \leq |C'|$ を満たすもの



$\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ は
最小頂点被覆ではない



$\{v_1, v_2, v_5, v_7, v_8\}$ は
最小頂点被覆である

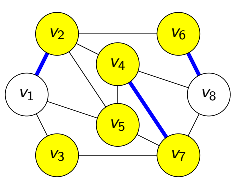
マッチングと頂点被覆の関係

無向グラフ $G = (V, E)$

性質：マッチングと頂点被覆の関係 (重要)

M が G のマッチング
C が G の頂点被覆 $\Rightarrow |M| \leq |C|$

例：$|M| = 3$, $|C| = 6$



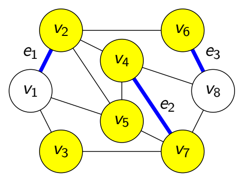
マッチングと頂点被覆の関係：証明の着想

無向グラフ $G = (V, E)$

性質：マッチングと頂点被覆の関係 (重要)

M が G のマッチング
C が G の頂点被覆 $\Rightarrow |M| \leq |C|$

証明の着想：数え上げ論法による



$$
\begin{array}{c|cccccc|c}
M \backslash C & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & \\
\hline
e_1 & 1 & & & & & & \geq 1 \\
e_2 & & & 1 & & & 1 & \geq 1 \\
e_3 & & & & & 1 & & \geq 1 \\
\hline
 & \leq 1 & \leq 1 & \leq 1 & \leq 1 & \leq 1 & \leq 1 &
\end{array}
$$

この行列における成分の総和を 2 通りの計算で考えてみる

マッチングと頂点被覆の関係：証明

証明：行列 $X \in \mathbb{R}^{M \times C}$ を次のように定義する

$$e \in M, v \in C \text{ に対して，} \quad X_{e,v} = \begin{cases} 1 & (v \text{ が } e \text{ の端点であるとき}) \\ 0 & (v \text{ が } e \text{ の端点ではないとき}) \end{cases}$$

- C は頂点被覆なので，M の各辺に接続する C の頂点の数は 1 以上

$$\therefore \quad \sum_{e \in M} \sum_{v \in C} X_{e,v} = \sum_{e \in M} \left(\sum_{v \in C} X_{e,v} \right) \geq \sum_{e \in M} 1 = |M|$$

- M はマッチングなので，C の各頂点に接続する M の辺の数は 1 以下

$$\therefore \quad \sum_{e \in M} \sum_{v \in C} X_{e,v} = \sum_{v \in C} \left(\sum_{e \in M} X_{e,v} \right) \leq \sum_{v \in C} 1 = |C|$$

- $\therefore |M| \leq \sum_{e \in M} \sum_{v \in C} X_{e,v} \leq |C|$ □

マッチングと頂点被覆の関係：帰結

無向グラフ $G = (V, E)$

性質：マッチングと頂点被覆の関係 (重要)

M が G のマッチング
C が G の頂点被覆 $\Rightarrow |M| \leq |C|$

性質 (系)：最大マッチングと頂点被覆の関係

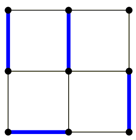
M が G の最大マッチング
C が G の頂点被覆 $\Rightarrow |M| \leq |C|$

性質 (系)：最大マッチングと最小頂点被覆の関係 (弱双対性)

M が G の最大マッチング
C が G の最小頂点被覆 $\Rightarrow |M| \leq |C|$

頂点被覆の重要性

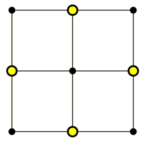
次のグラフの最大マッチングの辺数は何か？



最大マッチングの辺数 ≥ 4

頂点被覆の重要性 (続き)

次のグラフの最大マッチングの辺数は何か？



これは頂点被覆なので，

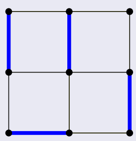
最大マッチングの辺数 ≤ 4

- したがって，最大マッチングの辺数 $= 4$ である!!!

頂点被覆の重要性：今一度

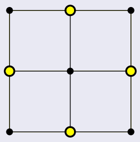
次のグラフの最大マッチングの辺数は何か？

下界 (かかい)



最大マッチングの辺数 ≥ 4

上界



最大マッチングの辺数 ≤ 4

したがって，最大マッチングの辺数 $= 4$

格言

頂点被覆がマッチングの最大性を保証する

頂点被覆の重要性：まとめ

次の 2 つを同時に行う

下界

辺数 k のマッチングを見つける

- このとき，最大マッチングの辺数 $\geq k$

上界

頂点数 k の頂点被覆を見つける

- このとき，最大マッチングの辺数 $\leq k$

よって，この 2 つができれば

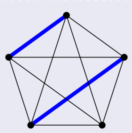
最大マッチングの辺数 $= k$

頂点被覆の重要性：注意

注意

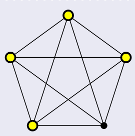
要素数が同じであるマッチングと頂点被覆が必ず存在するわけではない

下界



最大マッチングの辺数 ≥ 2

上界



最大マッチングの辺数 ≤ 4

しかし，存在する場合には，マッチングの最大性を保証できる

目次

1. グラフにおけるマッチング
2. 最大マッチングと頂点被覆
3. Hall の結婚定理
4. 今日のまとめ

二部グラフの完全マッチング

注意 (再掲)

要素数が同じであるマッチングと頂点被覆が必ず存在するわけではない

しかし，存在する場合には，マッチングの最大性を保証できる

- 例：二部グラフ (後の講義で扱う)

今日の残りの時間

二部グラフの完全マッチングを調べる

補足 完全マッチング は 最大マッチング

二部グラフ (復習)

無向グラフ $G = (V, E)$

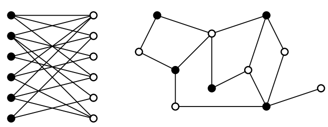
二部グラフとは？

G が二部グラフであるとは，

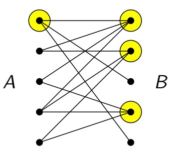
- 頂点集合 V を 2 つの集合 A, B に分割できて
- どの辺 $e \in E$ も一端点を A に持ち，もう一端点を B に持つもの

A と B を G の部集合と呼ぶ

二部グラフの例

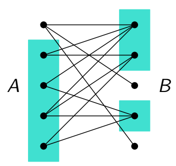


二部グラフが完全マッチングを持たないことの確認法？ (1)



- ∴ | 最大マッチング | ≤ 4
- ∴ このグラフは完全マッチングを持たない

二部グラフが完全マッチングを持たないことの確認法？ (2)



- A の青い部分を飽和させるだけの頂点が B にない
- ∴ このグラフは完全マッチングを持たない

今から証明すること

そのような部分がなければ，必ず完全マッチングを作れる

まずは用語の定義から…

近傍

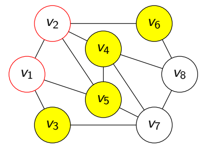
近傍とは？

無向グラフ $G = (V, E)$ における頂点 $v \in V$ の近傍とは
v の隣接頂点全体の集合

$$N_G(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}$$

G における頂点集合 $S \subseteq V$ の近傍とは

$$N_G(S) = \left(\bigcup_{v \in S} N_G(v)\right) - S$$



- $N_G(v_1) = \{v_2, v_3, v_5\}$
- $N_G(\{v_1, v_2\}) = \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$

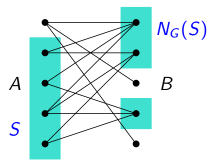
Hall の結婚定理：二部グラフにおける完全マッチングの存在性

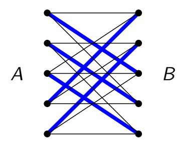
二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B，$|A| = |B|$

Hall の結婚定理

G が完全マッチングを持つ $\Leftrightarrow$
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N_G(S)|$ （結婚条件）

例：





P. Hall

Philip Hall
ホール
(1904–1982)

http://www.ams.org/publicoutreach/feature-column/fcarc-marriage

Hall の結婚定理：証明 (1)

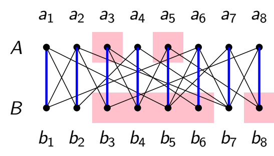
二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B，$|A| = |B|$

Hall の結婚定理

G が完全マッチングを持つ $\Leftrightarrow \forall S \subseteq A$: $|S| \leq |N_G(S)|$ （結婚条件）

必要性の証明：G が完全マッチング M を持つと仮定

- $M = \{\{a_i, b_i\} \mid a_i \in A, b_i \in B, i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ とする
- 任意の $S \subseteq A$ は $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ を使って $S = \{a_i \mid i \in I\}$ と書ける
- このとき，$N_G(S) \supseteq \{b_i \mid i \in I\}$ となるので，$|S| = |I| \leq |N_G(S)|$ □



$I = \{3, 5\}$
$S = \{a_3, a_5\}$

Hall の結婚定理：証明 (2)

十分性の証明：$|A|$ に関する数学的帰納法 (累積帰納法)

証明すること：任意の自然数 $n \geq 1$ について次を証明

$|A| = n$ であるような任意の二部グラフ G に対して (部集合は A, B)
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N_G(S)|$ （結婚条件）
$\Rightarrow$ G が完全マッチングを持つ

$n = 1$ のとき：可能な二部グラフは 2 種類に限られる

左のみ，完全マッチングを持ち，かつ，結婚条件を満たす

Hall の結婚定理：証明 (3)

任意の自然数 $k \geq 1$ を考える

帰納法の仮定

任意の自然数 $\ell \leq k$ に対して，
$|A| = \ell$ であるような任意の二部グラフ G に対して (部集合は A, B)
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N_G(S)|$ （結婚条件）
$\Rightarrow$ G が完全マッチングを持つ

帰納法で導くこと

$|A| = k + 1$ であるような任意の二部グラフ G に対して (部集合は A, B)
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N_G(S)|$ （結婚条件）
$\Rightarrow$ G が完全マッチングを持つ

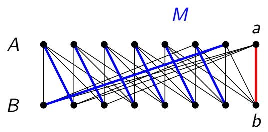
- $|A| = k + 1$ であるような任意の二部グラフ $G = (V, E)$ を考える
(部集合は A, B)
- 2 通りに場合分け

Hall の結婚定理：証明 (4)

場合 1

すべての非空な $S \subsetneq A$ に対して，$|S| \leq |N_G(S)| - 1$

- $\{a, b\}$ を G の任意の辺とする (ただし，$a \in A$, $b \in B$)
- G から頂点 a と b を除去したグラフを G' とする
- G' は結婚条件を満たす (なぜ？)
- 帰納法の仮定から，G' は完全マッチング M を持つ
- $M \cup \{\{a, b\}\}$ は G の完全マッチングである

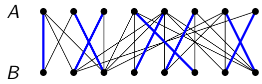


Hall の結婚定理：証明 (5)

場合 2

ある非空な $S \subsetneq A$ に対して，$|S| = |N_G(S)|$

- そのような S を考える
- G を $S \cup N_G(S)$ に制限したグラフを G' とする
- G を $(A - S) \cup (B - N_G(S))$ に制限したグラフを G'' とする
- G' と G'' は結婚条件を満たす (なぜ？)
- 帰納法の仮定から，G', G'' は完全マッチング M', M'' を持つ
- $M' \cup M''$ は G の完全マッチングである



目次

今日のまとめ

今日の目標

「マッチング」を理解する

- マッチングの定義
- 最大マッチングと極大マッチングの違い
- 最大マッチングと最小頂点被覆の関係
- 結婚定理とその意義

重要な概念

- 最適性の保証 (弱双対性) $\rightsquigarrow$ 最適化の基礎

上の弱双対性は，線形計画法の弱双対性と密接に関係

$\rightsquigarrow$ 『数理計画法』