グラフとネットワーク　　　　　　　　　　2019 年 8 月 9 日
期末試験　　　　　　　　　　　　　　　　岡本 吉央

13:00–14:30．携帯電話，タブレット等は**電源を切って**カバンの中にしまうこと．使用可能な解答用紙は 1 枚のみ．
採点終了次第，講義 web ページにて，得点分布，講評などを掲載する．
採点結果を知りたい場合は，解答用紙右上「評点」欄の中に 5 文字程度の適当なランダム文字列を記載のこと (その文字列は控えておくように)．
採点終了後，そのランダム文字列と得点の対応表を公開する．

問題 1

有向グラフ $G=(V,A)$，非負容量関数 $c\colon A\to\mathbb{R}$，2 頂点 $s,t\in V$ を考える．このとき，s から t へ至る任意の流れ $f\colon A\to\mathbb{R}$ と任意の s,t カット S に対して次の等式が成り立つことを証明せよ．

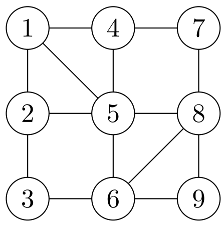
$$\mathtt{val}(f)=\sum_{\substack{(u,v)\in A:\\ u\in S, v\notin S}} f((u,v))-\sum_{\substack{(u,v)\in A:\\ u\notin S, v\in S}} f((u,v)).$$

ただし，$\mathtt{val}(f)$ は次の式で定義される．

$$\mathtt{val}(f)=\sum_{u:(s,u)\in A} f((s,u))-\sum_{u:(u,s)\in A} f((u,s)).$$

問題 2

次の無向グラフ G を考える．各頂点に付与されている数はその頂点の番号 (名前) を表す．



各頂点 v に対して次のように非負整数 $m(v)$ が与えられたとき，各頂点の入次数を $m(v)$ とするような G の向き付けが存在するか，判定したい．以下の問いに答えよ．

$$\begin{aligned}
&m(1)=1, && m(2)=1, && m(3)=1,\\
&m(4)=1, && m(5)=1, && m(6)=3,\\
&m(7)=1, && m(8)=3, && m(9)=2.
\end{aligned}$$

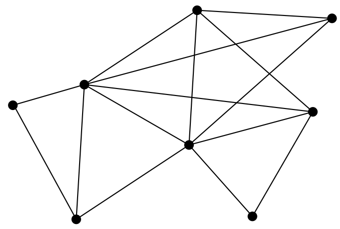
(1) 条件を満たす向き付けが存在するか判定する問題を最大流問題としてモデル化せよ．

(2) 問 (1) で得られた問題に対する最大流は何か？ また，最小 s,t カットは何か？ 最大流の値と最小 s,t カットの容量が一致することを確かめよ．

(3) 上問の結果を用いて，条件を満たす向き付けが存在するか，判定せよ．

問題 3

次の無向グラフにおける色数最小の彩色を与えよ．その彩色の色数が最小であることも証明せよ．



問題 4

次の 3 条件をどれも満たす 3 次元凸多面体をすべて挙げよ．なぜそうなるのか，理由も述べよ．

- 面として，正三角形と正方形を少なくとも 1 つずつ含む．
- 面として，正三角形と正方形以外を含まない．
- どの頂点においても，集まる面の数はちょうど 3 である．

(ヒント：3 次元凸多面体のグラフが平面的であるという事実を用いてもよい．)

以上