提出締切： 2019 年 7 月 26 日 講義終了時

復習問題 12.1 任意の木が平面的グラフであることを証明せよ．

復習問題 12.2 平面グラフ G の辺 e を考える．辺 e が G の切断辺であるための必要十分条件は，e を境界に持つ G の面が唯一であることである．これを証明せよ．

復習問題 12.3 平面グラフ G の頂点数，辺数，面数，連結成分数がそれぞれ n, m, f, k であるとき，

$$n - m + f = 1 + k$$

が成り立つことを証明せよ．

復習問題 12.4 切断辺を持たない平面グラフの双対グラフが平面的であることを証明せよ．

復習問題 12.5 次の問いに答えよ．

1. 頂点数が 3 以上である任意の連結平面的グラフ $G = (V, E)$ に対して，$|E| \leq 3 \cdot |V| - 6$ が成り立つことを証明せよ．
2. それを用いて，頂点数 5 の完全グラフ K_5 が平面的ではないことを証明せよ．

復習問題 12.6 正四面体，正六面体，正八面体，正十二面体，正二十面体以外に，3 次元正多面体が存在しないことを証明せよ．(ヒント：3 次元凸多面体のグラフが平面的であるという事実を用いてもよい．)

追加問題 12.7 3 以上のある整数 n に対して，頂点数が n であり，辺数が $3n - 6$ 以下であるが，平面的ではないグラフを構成せよ．そのグラフがなぜ平面的でないのかも説明せよ．

追加問題 12.8 次の問いに答えよ．

1. 頂点数が 3 以上である任意の連結平面的グラフ $G = (V, E)$ に対して，G が長さ 3 の閉路を含まないならば，$|E| \leq 2 \cdot |V| - 4$ が成り立つことを証明せよ．
2. それを用いて，完全二部グラフ $K_{3,3}$ が平面的ではないことを証明せよ．

追加問題 12.9 各面が正五角形か正六角形であるような 3 次元凸多面体において，正五角形である面の数が必ず 12 になることを証明せよ．(ヒント：3 次元凸多面体のグラフが平面的であるという事実を用いてもよい．まず，各頂点の次数が 3 であることを証明せよ．)

追加問題 12.10 次の 3 条件をどれも満たす 3 次元凸多面体をすべて挙げよ．なぜそうなるのか，理由も述べよ．

- 面として，正三角形と正方形を少なくとも 1 つずつ含む．
- 面として，正三角形と正方形以外を含まない．
- どの頂点においても，集まる面の数はちょうど 3 である．

(ヒント：3 次元凸多面体のグラフが平面的であるという事実を用いてもよい．)

追加問題 12.11 次は正しいか否か，理由も付けて答えよ．

> 切断辺を持たない平面グラフの双対グラフは切断辺を持たない．

(注意：この命題の正否は，双対グラフの定義に依存する可能性がある．この講義における双対グラフの定義に従って考えるように．)