グラフとネットワーク (10) **2019 年 7 月 5 日**

演習問題 岡本 吉央

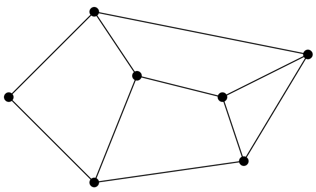
提出締切： 2019 年 7 月 12 日 講義終了時

復習問題 10.1 無向グラフ G が 2 彩色可能であるための必要十分条件は，G が二部グラフであることである．これを証明せよ．

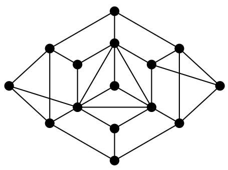
復習問題 10.2 任意の無向グラフ G に対して，その染色数 $\chi(G)$ と最大次数 $\Delta(G)$ が $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$ という関係を満たすことを証明せよ．

復習問題 10.3 任意の無向グラフ G に対して，その染色数 $\chi(G)$ と任意のクリーク $C \subseteq V$ が $\chi(G) \geq |C|$ という関係を満たすことを証明せよ．

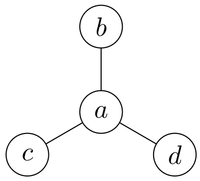
復習問題 10.4 次の無向グラフにおける色数最小の彩色を与えよ．その彩色の色数が最小であることも証明せよ．



復習問題 10.5 次の無向グラフにおける色数最小の彩色を与えよ．その彩色の色数が最小であることも証明せよ．



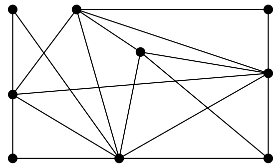
補足問題 10.6 次の図にある無向グラフ G がどの無向グラフの線グラフではない (つまり，$G = L(H)$ となる無向グラフ H が存在しない) ということを証明せよ．



補足問題 10.7 任意の無向グラフ $G=(V,E)$ に対して，頂点集合 V 上のある全順序が存在して，その全順序に従って貪欲彩色を行うと，色数最小の彩色が得られることを証明せよ．(ヒント：直感を得るために，まず G が二部グラフの場合を考えるとよいかもしれない．)

追加問題 10.8 任意の無向グラフ $G=(V,E)$ と G の任意の独立集合 $I \subseteq V$ を考える．このとき，I の補集合 $V-I$ は G の頂点被覆であることを証明せよ．

追加問題 10.9 次の無向グラフにおいて，色数最小の彩色を与えよ．その彩色の色数が最小であることも証明せよ．



追加問題 10.10 無向グラフ $G=(V,E)$ に対して，その独立集合の頂点数の最大値を $\alpha(G)$ で表す．このとき，$\alpha(G)\chi(G) \geq |V|$ が成り立つことを証明せよ．

追加問題 10.11 任意の自然数 $k \geq 2$ に対して，次の性質を持つ二部グラフ $G=(V,E)$ を構成せよ．

> 性質：G の最大次数は k であり，V 上の**ある**全順序 σ が存在して，それに従う貪欲彩色によって G の彩色として色数 $k+1$ のものが得られる．

(注意：k は 2 以上の**任意**の自然数であることに注意する．すなわち，k によって G は変わる．)

追加問題 10.12 連結無向グラフ G の最大次数は 3 であり，最小次数は 2 であるとする．このとき，G は 3 彩色可能であることを証明せよ．