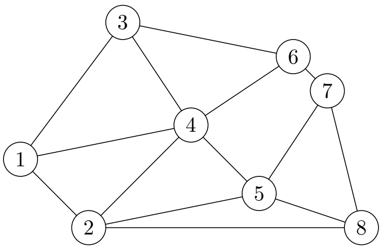
グラフとネットワーク (8)	**2019 年 6 月 21 日**
演習問題	岡本 吉央

提出締切： 2019 年 6 月 28 日 講義終了時

復習問題 8.1 次の無向グラフ G を考える．各頂点に付与されている数はその頂点の番号 (名前) を表す．各頂点 v に対して非負整数 $m(v)$ が与えられているとき，v の入次数を $m(v)$ とするような向き付けが存在するか，判定したい．



以下の問いに答えよ．

(1) 次のように $m(v)$ が与えられたとき，各頂点の入次数を $m(v)$ とするような G の向き付けが存在することを示せ．

$$m(1) = 1, m(2) = 2, m(3) = 2, m(4) = 2, m(5) = 3, m(6) = 1, m(7) = 2, m(8) = 1.$$

(2) 次のように $m(v)$ が与えられたとき，各頂点の入次数を $m(v)$ とするような G の向き付けが存在しないことを以下の手順に従って示せ．

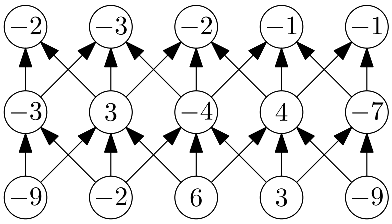
$$m(1) = 2, m(2) = 0, m(3) = 2, m(4) = 3, m(5) = 1, m(6) = 2, m(7) = 3, m(8) = 1.$$

(2-1) 条件を満たす向き付けが存在するか判定する問題を最大流問題としてモデル化せよ．

(2-2) 問 (2-1) で得られた問題に対する最大流は何か？ また，最小 s, t カットは何か？ 最大流の値と最小 s, t カットの容量が一致することを確かめよ．

(2-3) 上問の結果を用いて，条件を満たす向き付けが存在しないことを結論として導け．

復習問題 8.2 次のような有向グラフを考える．各頂点に付与されている数はその頂点の重みを表す．



考える問題は，次の条件を満たす頂点部分集合 X でその頂点重み和が最大のものを見つけることである．

頂点 x, y に対して，弧 (x, y) が存在し，$x \in X$ であるとき，$y \in X$ も成り立つ．

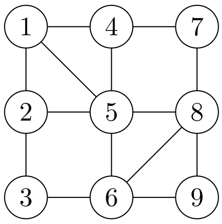
以下の問いに答えよ．

(1) この問題を最小 s, t カット問題としてモデル化せよ．

(2) 問 (1) で得られた問題に対する最小 s, t カットは何か？ また，最大流は何か？ 最大流の値と最小 s, t カットの容量が一致することを確かめよ．

(3) 上問の結果を用いて，上の条件を持つ頂点部分集合の中で，頂点重み和が最大のものが何であるか，答えよ．

追加問題 8.3 次の無向グラフ G を考える．各頂点に付与されている数はその頂点の番号 (名前) を表す．



各頂点 v に対して次のように非負整数 $m(v)$ が与えられたとき，各頂点の入次数を $m(v)$ とするような G の向き付けが存在するか，判定したい．以下の問いに答えよ．

$$m(1) = 2, m(2) = 3, m(3) = 1, m(4) = 2, m(5) = 1, m(6) = 2, m(7) = 2, m(8) = 1, m(9) = 0.$$

(1) 条件を満たす向き付けが存在するか判定する問題を最大流問題としてモデル化せよ．

(2) 問 (2) で得られた問題に対する最大流は何か？ また，最小 s, t カットは何か？ 最大流の値と最小 s, t カットの容量が一致することを確かめよ．

(3) 上問の結果を用いて，条件を満たす向き付けが存在するか，判定せよ．

追加問題 8.4 Y 大学の Z 学科では次のような講義が開講される．講義の履修には，それが前提とする講義をすべて先に履修しなければならない．しかし，いくつかの講義は厄介で，それを履修して得られる知識・技術が，そのためのコストに比べて著しく小さいものがある．それを考慮して，各講義の利得を算出したものを以下の表にまとめた．

講義名	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
前提とする講義	なし	なし	なし	なし	A と B	C	B と C	D	F	G	G と H
利得	1	-1	2	1	-2	1	-1	-1	2	-1	2

同じ時間帯に開講される講義はないものとする．このとき，利得和を最大とするように履修計画を立てたい．

(1) この問題を最小 s, t カット問題としてモデル化せよ．(ヒント：露天掘り問題を参考にせよ．)

(2) 問 (1) で得られた問題に対する最小 s, t カットは何か？ また最大流は何か？ 最小 s, t カットの容量と最大流の値が一致することを確かめよ．

(3) 上問の結果より，利得和を最大とするような履修計画が何であるか，1 つ答えよ．