提出締切： 2019 年 6 月 21 日 講義終了時

復習問題 7.1 砂漠で遭難した人々をオアシスで救護したい．遭難者は 8 人おり，オアシスは 3 か所ある．遭難者は携帯電話によって決められた場所まで歩くよう誘導できる．各オアシスに対して，各遭難者までの距離と救護可能人数は次の通りである．

距離 (km)	遭難者 1	2	3	4	5	6	7	8	救護可能人数 (人)
オアシス A	3	2	1	3	4	2	4	1	3
オアシス B	1	1	1	5	1	1	2	3	3
オアシス C	2	4	4	2	4	2	1	2	4

このとき，どの遭難者の歩く距離も 3 km 未満であるとして，全員救護できるか，判定したい．

(1) この問題を最大流問題としてモデル化せよ．

(2) 問 (1) で得られた問題に対する最大流は何か？ また，最小 s,t カットは何か？ 最大流の値と最小 s,t カットの容量が一致することを確かめよ．

(3) 上問の結果より，全員救護できるかできないか答えよ．また，全員救護できないとき，最大何人まで救護できるか答えよ．

復習問題 7.2 Kőnig–Egerváry の定理は「任意の二部グラフ $G=(V,E)$ において，G の最大マッチング M と G の最小頂点被覆 $C \subseteq V$ に対して，$|M|=|C|$ となる」ことを主張している．以下の手順にしたがって，Kőnig–Egerváry の定理を証明せよ．

(1) 二部グラフ G の部集合を A,B とする．このとき，G から次の有向グラフ $G'=(V',A')$ を構成する．すなわち，$V'=V\cup\{s,t\}$ であり，

$$A' = \{(u,v) \mid \{u,v\}\in E, u\in A, v\in B\} \cup \{(s,u) \mid u\in A\} \cup \{(v,t) \mid v \in B\}$$

とするのである．また，G' の各弧 $(x,y)\in A'$ に対して容量を

$$c((x,y)) = \begin{cases} 1 & (x=s \text{ または } y=t \text{ のとき}),\\ \infty & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

と定める．(ただし，∞ は十分大きな整数を表す記号であると見なす．) G' において s から t へ至る最大流の値が G の最大マッチングの辺数以下であることを証明せよ．(ヒント：整数流定理を用いよ．)

(2) 問 (1) で構成した有向グラフ G' と弧容量に対して，G' における最小 s,t カットの容量が G の最小頂点被覆の頂点数以上であることを証明せよ．

(3) 最大マッチングと最小頂点被覆に対する弱双対性と最大流と最小 s,t カットに対する強双対性を用いて，Kőnig–Egerváry の定理の証明を完結させよ．

復習問題 7.3 次の表は，Major League Baseball アメリカンリーグ東地区の 1996 年 8 月 30 日の時点での対戦成績である[1]．ここで，NYY はニューヨーク・ヤンキース，BAL はボルティモア・オリオールズ，BOS はボストン・レッドソックス，TOR はトロント・ブルージェイズ，DET はデトロイト・タイガースをそれぞれ表す．

[1] http://lyle.smu.edu/~olinick/riot/detroit.html

チーム名	勝数	敗数	残り試合数	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	–	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	–	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	–	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	–	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	–	20

最終的に勝数が最も多いチームが優勝する．この状況で，デトロイト・タイガース (DET) が地区優勝可能かどうか判定したい．

(1) デトロイト・タイガースの優勝可能性判定問題を最大流問題としてモデル化せよ．

(2) 問 (1) で得られた問題に対する最大流は何か？ また最小 s, t カットは何か？ 最大流の値と最小 s, t カットの容量が一致することを確かめよ．

(3) 上問の結果より，デトロイト・タイガースにまだ優勝の可能性があるかどうか，答えよ．

追加問題 7.4 二部グラフ $G = (V, E)$ の辺数を m とし，最大次数を $\Delta \geq 1$ とする．Kőnig–Egerváry の定理を用いて，G が辺数 m/Δ 以上のマッチングを持つことを証明せよ．

追加問題 7.5 問題 7.1 における状況で，どの遭難者の歩く距離も 2 km 未満であるとして，全員救護できるか，考える．

(1) この問題を最大流問題としてモデル化せよ．

(2) その問題における最大流は何か？ また最小 s, t カットは何か？ 最大流の値と最小 s, t カットの容量が一致することを確かめよ．

(3) 上問の結果より，全員救護できるかできないか答えよ．また全員救護できないとき，最大何人まで救護できるか答えよ．

追加問題 7.6 問題 7.3 に書いてあるリーグ戦の途中経過を考える．最終的に勝数が最も多いチームが優勝する．この状況で，トロント・ブルージェイズ (TOR) にまだ優勝の可能性があるかどうか判定したい．

(1) TOR の優勝可能性判定問題を最大流問題としてモデル化せよ．

(2) 問 (1) で得られた問題に対する最大流は何か？また最小 s, t カットは何か？ 最大流の値と最小カットの容量が一致することを確かめよ．

(3) 上問の結果より，TOR にまだ優勝の可能性があるかどうか，答えよ．

追加問題 7.7 次のような架空のリーグ戦における途中経過を考える．

チーム名	勝数	残り試合数	A	B	C	D
A	83	8	–	1	6	1
B	79	4	1	–	0	3
C	78	7	6	0	–	1
D	76	5	1	3	1	–

最終的に勝数が最も多いチームが優勝する．この状況で，チーム B にまだ優勝の可能性があるかどうか判定したい．

(1) チーム B の優勝可能性判定問題を最大流問題としてモデル化せよ．

(2) 問 (1) で得られた問題に対する最大流は何か？また最小 s, t カットは何か？ 最大流の値と最小カットの容量が一致することを確かめよ．

(3) 上問の結果より，チーム B にまだ優勝の可能性があるかどうか，答えよ．