提出締切： 2019 年 6 月 14 日 講義終了時

復習問題 6.1 有向グラフ $G=(V,A)$，非負容量関数 $c\colon A\to\mathbb{R}$，2 頂点 $s,t\in V$ を考える．このとき，s から t への任意の流れ $f\colon A\to\mathbb{R}$ に対して，次の等式が成り立つことを証明せよ．

$$f^+(s)-f^-(s)=f^-(t)-f^+(t).$$

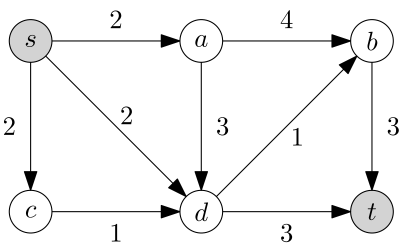
(ヒント：問題 6.5 の結果を用いてもよい．)

復習問題 6.2 有向グラフ $G=(V,A)$，非負容量関数 $c\colon A\to\mathbb{R}$，2 頂点 $s,t\in V$ を考える．このとき，s から t へ至る任意の流れ $f\colon A\to\mathbb{R}$ と任意の s,t カット S に対して次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\mathtt{val}(f)\le\mathtt{cap}(S).$$

(ヒント：問題 6.6 の結果を用いてもよい．)

復習問題 6.3 次の有向グラフにおいて，s から t へ至る最大流を 1 つ見つけよ．また，それが最大流であることを証明せよ．



各弧の横に添えられている数はその弧の容量を表す．(注意：増加道法を動かした様子を証明において記述する必要はない (記述しない方がよい)．それによって見つかった流れが最大流であることを証明するために，弱双対性を利用せよ．)

復習問題 6.4 有向グラフ $G=(V,A)$，非負<u>整数値</u>容量関数 $c\colon A\to\mathbb{Z}$，2 頂点 $s,t\in V$ を考える．このとき，増加道法の動きに関して以下の問いに答えよ．

1. 増加道法が停止したとき，出力される流れは s から t へ至る最大流であることを証明せよ．(ヒント：問題 6.6 の結果を用いてもよい．)
2. 増加道法が停止することを証明せよ．
3. 以上の 2 つより，s から t へ至る最大流の値と最小 s,t カットの容量が等しいことを導け．
4. 増加道法が停止したとき，出力される流れにおいては，どの弧に流れる量も整数であることを証明せよ．

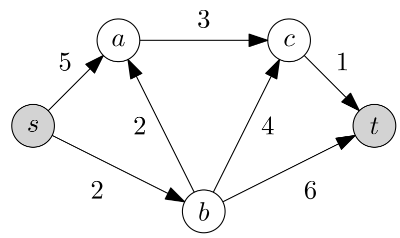
補足問題 6.5 有向グラフ $G=(V,A)$，非負容量関数 $c\colon A\to\mathbb{R}$，2 頂点 $s,t\in V$ を考える．このとき，s から t へ至る任意の流れ $f\colon A\to\mathbb{R}$ に対して，次の等式が成り立つことを証明せよ．

$$\sum_{a\in A}f(a)=\sum_{v\in V}f^+(v)=\sum_{v\in V}f^-(v).$$

補足問題 6.6 有向グラフ $G=(V,A)$，非負容量関数 $c\colon A\to\mathbb{R}$，2 頂点 $s,t\in V$ を考える．このとき，s から t へ至る任意の流れ $f\colon A\to\mathbb{R}$ と任意の s,t カット S に対して次の等式が成り立つことを証明せよ．

$$\mathtt{val}(f)=\sum_{\substack{(u,v)\in A:\\ u\in S,v\notin S}}f((u,v))-\sum_{\substack{(u,v)\in A:\\ u\notin S,v\in S}}f((u,v)).$$

追加問題 6.7 次の有向グラフにおいて，s から t へ至る最大流を 1 つ見つけよ．また，それが最大流であることを証明せよ．



各弧の横に添えられている数はその弧の容量を表す．

追加問題 6.8 有向グラフ $G=(V,A)$，非負容量関数 $c\colon A\to\mathbb{R}$，2 頂点 $s,t\in V$ を考える．以下の問いに答えよ．

1. 任意の s,t カット X,Y に対して，$X\cap Y$ と $X\cup Y$ も s,t カットであることを証明せよ．
2. 任意の s,t カット X,Y に対して，
$$\mathtt{cap}(X)+\mathtt{cap}(Y)\ge\mathtt{cap}(X\cap Y)+\mathtt{cap}(X\cup Y)$$
が成り立つことを証明せよ．(補足：この不等式は劣モジュラ不等式と呼ばれ，離散最適化の様々な場面において重要な役割を果たすことが知られている．)
3. 任意の最小 s,t カット X,Y に対して，$X\cap Y$ と $X\cup Y$ も最小 s,t カットであることを証明せよ．