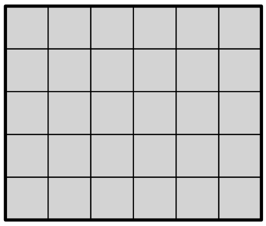
グラフとネットワーク (5) **2019 年 5 月 24 日**

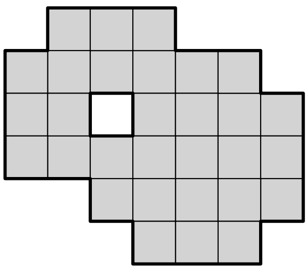
演習問題 岡本 吉央

提出締切： 2019 年 5 月 31 日 講義終了時

復習問題 5.1 次の灰色の部分で表された盤面に 1×2 の長方形をいくつか重なりあうことなく置くことで，この盤面全体を敷き詰めることができるだろうか？ 理由も付けて答えよ．



復習問題 5.2 次の灰色の部分で表された盤面に 1×2 の長方形をいくつか重なりあうことなく置くことで，この盤面全体を敷き詰めることができるだろうか？ 理由も付けて答えよ．



復習問題 5.3 トランプ・カードの 1 デッキには，各ランク (A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K) のカードが 4 枚ずつ存在する．つまり，カードの総枚数は 52 である．この 52 枚のカードを 4 枚ずつ 13 個の組へ任意に分けたとき，各組から 1 枚ずつカードをうまく選ぶと，すべてのランクのカードを取り出せることを証明せよ．

復習問題 5.4 4×4 の正方格子状の盤面上で行う次の二人ゲームを考える．先手と後手が交互に 1 マスずつ選択する．既に選択されたマスを選択することはできない．先に，縦の 1 列か横の 1 列に並ぶ 4 マスを選択した人が勝利する．

このゲームにおいて，後手は，自身が負けないようにマスを選択できることを証明せよ．

補足問題 5.5 演習問題 5.4 のゲームにおいて，先手は，自身が負けないようにマスを選択できることを証明せよ．

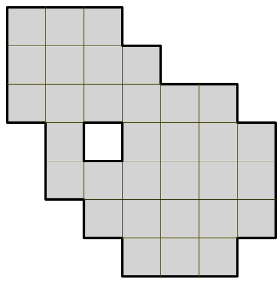
補足問題 5.6 演習問題 5.4 のゲームの変種として，先に，縦の 1 列か横の 1 列か斜めの 1 列に並ぶ 4 マスを選択した人が勝利するゲームを考える．

1. このゲームにおいて，先手は，自身が負けないようにマスを選択できることを証明せよ．
2. このゲームにおいて，後手は，自身が負けないようにマスを選択できることを証明せよ．(ヒント：先手の 1 手目においては，全通りの可能性を考えよ．その後，後手の 1 手目をうまく選択することで，演習問題 5.4 と同様の論法を用いてみよ．)

追加問題 5.7 1 以上の任意の整数 d を考える．二部グラフ $G = (V, E)$ のすべての頂点の次数が d であるとする．

1. G の 2 つの部集合を A と B とするとき，$|A| = |B|$ が成り立つことを証明せよ．
2. G が完全マッチングを持つことを証明せよ．

追加問題 5.8 次の灰色の部分で表された盤面に 1×2 の長方形をいくつか重なりあうことなく置くことで，この盤面全体を敷き詰めることができるだろうか？ 理由も付けて答えよ．



追加問題 (発展) 5.9 実正方行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が**二重確率行列**であるとは，A の任意の成分が非負であり，P のどの行の成分和，どの列の成分和も 1 であることである．二重確率行列が**置換行列**であるとは，その成分がどれも 0 か 1 であることである．

任意の二重確率行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ に対して，ある自然数 m と非負実数 $c_1, \ldots, c_m$，置換行列 $P_1, \ldots, P_m$ が存在して，

$$A = c_1 P_1 + \cdots + c_m P_m \quad \text{かつ} \quad c_1 + \cdots + c_m = 1$$

が成り立つことを証明せよ．例えば，

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 1/6 & 5/6 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

という等式が成立する．(ヒント：A における非零成分の数に関する数学的帰納法を用いてもよい．そのとき，Hall の結婚定理が使えるか考えてみよ．) (補足：これは，バーコフ・フォンノイマンの定理と呼ばれ，最適化理論において重要な役割を果たしている．)