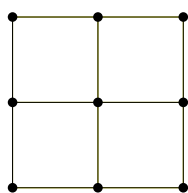


提出締切：2019年5月24日 講義終了時

復習問題 4.1 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ を考える。グラフ G の最大マッチングは G の極大マッチングであることを証明せよ。

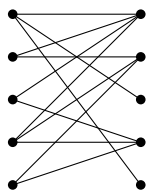
復習問題 4.2 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ を考える。このとき、 G の任意のマッチング $M \subseteq E$ と任意の頂点被覆 $C \subseteq V$ に対して $|M| \leq |C|$ が成り立つことを証明せよ。

復習問題 4.3 次の無向グラフの最大マッチングを1つ見つけて、それが最大マッチングであることを証明せよ。



復習問題 4.4 任意の二部グラフ $G = (V, E)$ を考え、その部集合は A, B であり、 $|A| = |B|$ を満たすとする。このとき、 G が完全マッチングを持つための必要十分条件は任意の $S \subseteq A$ に対して、 $|S| \leq |N(S)|$ が成り立つことである。これを証明せよ。(ヒント：十分性の証明に、数学的帰納法を用いてもよい。)

復習問題 4.5 次の図に示す二部グラフは完全マッチングを持たない。なぜ完全マッチングを持たないのか、次に挙げる方法を用いて説明せよ。



1. 頂点被覆を挙げることによって。
2. 結婚条件を満たさない頂点部分集合を挙げることによって。

補足問題 4.6 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ を考える。グラフ G に完全マッチング M が存在するとき、 $|V| = 2|M|$ が成り立つことを証明せよ。

補足問題 4.7 頂点数4の連結な無向グラフで、完全マッチングを持たないものを構成せよ。(なぜ完全マッチングを持たないのか、説明をせよ。)

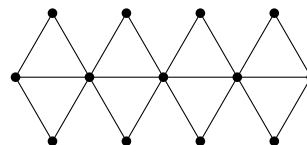
補足問題 4.8 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ を考える。グラフ G に完全マッチングが存在するとき、それは G の最大マッチングであることを証明せよ。

追加問題 4.9 すべての頂点の次数が3であるような連結無向グラフで、完全マッチングを持たないものを構成せよ。(なぜ完全マッチングを持たないのか、説明をせよ。)

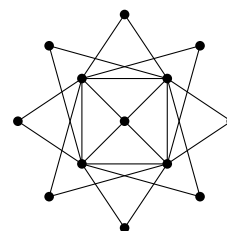
追加問題 4.10 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ において、任意のマッチング M と任意の極大マッチング M' を考える。このとき、 $|M| \leq 2|M'|$ が成り立つことを証明せよ。(ヒント： M' の辺が飽和する頂点から成る集合に注目せよ。)

追加問題 4.11 無向グラフ $G = (V, E)$ が森(つまり、各連結成分が木であるグラフ)であると仮定する。このとき、 G の完全マッチングの個数は1か0であることを証明せよ。

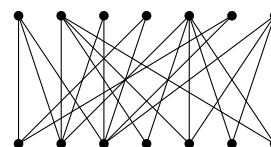
追加問題 4.12 次の無向グラフの最大マッチングを1つ見つけて、それが最大マッチングであることを証明せよ。



追加問題 4.13 次の無向グラフの最大マッチングを1つ見つけて、それが最大マッチングであることを証明せよ。



復習問題 4.14 次の図に示す二部グラフは完全マッチングを持たない。なぜ完全マッチングを持たないのか、次に挙げる方法を用いて説明せよ。



1. 頂点被覆を挙げることによって。
2. 結婚条件を満たさない頂点部分集合を挙げることによって。