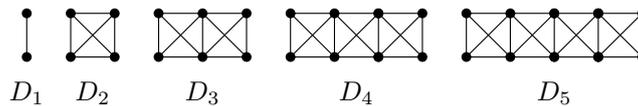


9:00–10:30. A4用紙(両面自筆書き込み)のみ持ち込み可. 使用可能な解答用紙は1枚のみ.
携帯電話, タブレット等は電源を切ってカバンの中にする.

採点終了次第, 講義 web ページにて, 得点分布, 講評などを掲載する.

採点結果を知りたい場合は, 解答用紙右上「評点」欄の中に5文字程度の適当なランダム文字列を記載のこと(その文字列は控えておくように).
採点終了後, そのランダム文字列と得点の対応表を公開する.

問題 1 自然数 $n \geq 1$ に対して, 次の図で表されるグラフ D_n を考える.



グラフ D_n における完全マッチングの総数を d_n とするとき, 次の漸化式が成り立つことを証明せよ.

$$d_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ d_{n-1} + 2d_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

問題 2 次の漸化式を考える.

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3a_{n-1} - n & (n \geq 2 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって, 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ の一般項 a_n を閉じた形で与えよ. (注: 母関数を用いる方法によらない解答であっても, 部分点を与える.)

問題 3 次の表示を持つ2つの群 G, H を考える.

$$G = \langle r \mid r^4 = 1 \rangle, \\ H = \langle a, b \mid a^2 = 1, b^2 = 1, ab = ba \rangle.$$

以下の問いに答えよ.

1. 群 G と H の群表を書け.
2. 群 G と H における, 各要素の位数が何であるか, 答えよ.
3. 群 G と H が同型ではないことを証明せよ.

問題 4 群 G に対して,

$$Z(G) = \{z \in G \mid \text{任意の } g \in G \text{ に対して, } zg = gz\}$$

と定義する. 以下の問いに答えよ.

1. $Z(G)$ が G の部分群であることを証明せよ.
2. $Z(G)$ が G の正規部分群であることを証明せよ.
3. G がアーベル群であるとき, $Z(G) = G$ が成り立つことを証明せよ.

以上