離散数理工学　第 5 回
離散代数：図形とグラフの対称性

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2019 年 11 月 5 日

最終更新：2019 年 11 月 8 日　13:56

主題

次の 3 つを道具として
離散システム／アルゴリズムの設計と解析に関する方法論を学習する

- 数え上げ組合せ論
- 代数系
- 離散確率論

キャッチフレーズ：「離散数学を使う」

達成目標：以下の 3 項目をすべて達成することを目標とする

1. 数え上げ組合せ論，代数系，離散確率論における用語を正しく使うことができる
2. 数え上げ組合せ論，代数系，離散確率論における典型的な論法を用いて，証明を行うことができる
3. 数え上げ組合せ論，代数系，離散確率論を用いて，離散システム／アルゴリズムの設計と解析ができる

スケジュール 前半 (予定)

1. 数え上げの基礎：二項係数と二項定理 (10/1)
2. 数え上げの基礎：漸化式の立て方 (10/8)
3. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎) (10/15)

⋆ 休み (祝日) (10/22)

4. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展) (10/29)
5. 離散代数：図形とグラフの対称性 (11/5)
6. 離散代数：有限群 (11/12)
7. 離散代数：有限群の構造 (11/19)
8. 離散代数：グラフの対称性と有限群 (11/26)

注意：予定の変更もありうる

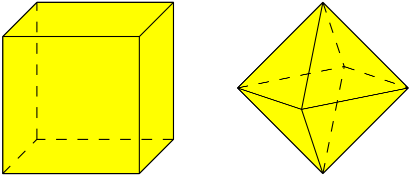
スケジュール 後半 (予定)

9	離散確率論：確率的離散システムの解析 (基礎)	(12/3)
⋆	中間試験	(12/10)
10	離散確率論：確率的離散システムの解析 (発展)	(12/17)
11	離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎)	(1/7)
12	離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展)	(1/14)
13	離散確率論：マルコフ連鎖 (基礎)	(1/21)
14	離散確率論：マルコフ連鎖 (発展)	(1/28)
⋆	授業等調整日	(2/4)
⋆	期末試験	(2/18?)

注意：予定の変更もありうる

問題

立方体と正八面体，どちらの対称性が高いか？



$\rightsquigarrow$ 対称性を比較する数学的道具が必要

$\rightsquigarrow$ 有限群

今日の目標

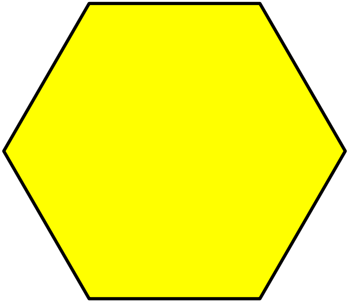
様々な対象に対して，置換を用いて対称性を記述できるようになる

- 2 次元図形の対称性 $\rightsquigarrow$ 回転，鏡映とそれらの合成
- 3 次元図形の対称性 $\rightsquigarrow$ 回転，鏡映とそれらの合成
- グラフの対称性 $\rightsquigarrow$ 自己同型写像

目次

1. 2 次元図形の対称性
2. 3 次元図形の対称性
3. グラフの対称性
4. 今日のまとめ

この図形は対称か？



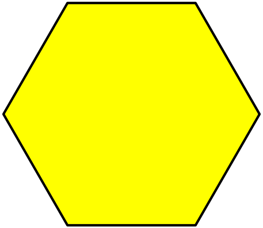
気にすべき点

そもそも「対称か？」という問いは，何を聞いているのか？

「対称性」の考え方

対称性を考えるときには

1. 許される変換の種類を固定する
2. 図形をそのままに留める (不変とする) 変換をすべて定める



2 次元の図形を考えるときには

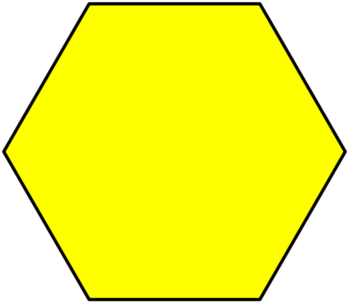
- 許される変換の種類 = 平行移動，回転，鏡映

そして，それらの合成とすることが多い

2 次元図形の回転対称性：例

問題

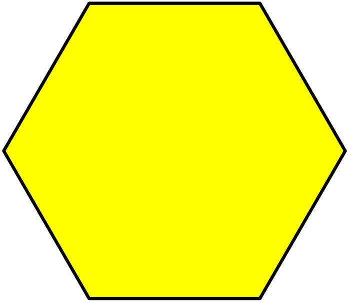
次の図形 (正六角形) を反時計回りに回転させるとき，
回転前と回転後の図形が一致する回転角は何か？



2 次元図形の回転対称性：例

問題

次の図形 (正六角形) を反時計回りに回転させるとき，
回転前と回転後の図形が一致する回転角は何か？



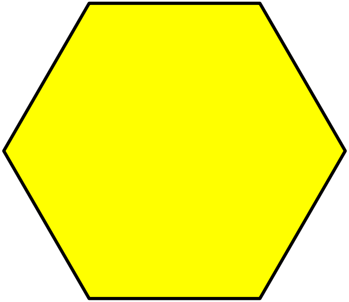
解答

60°，120°，180°，240°，300°，360°，420°，...

2 次元図形の回転対称性：例

問題

次の図形 (正六角形) を反時計回りに回転させるとき，
回転前と回転後の図形が一致する回転角は何か？



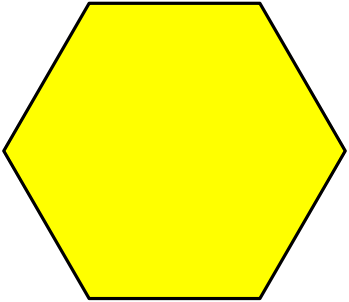
解答

0°，60°，120°，180°，240°，300°，360°，420°，...

2 次元図形の回転対称性：例

問題

次の図形 (正六角形) を反時計回りに回転させるとき，
回転前と回転後の図形が一致する回転角は何か？

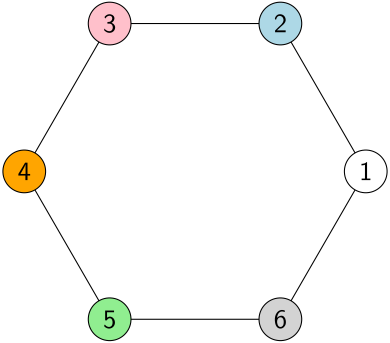


解答

0°, 60°, 120°, 180°, 240°, 300°, 360°, 420°, ... ←同じ？

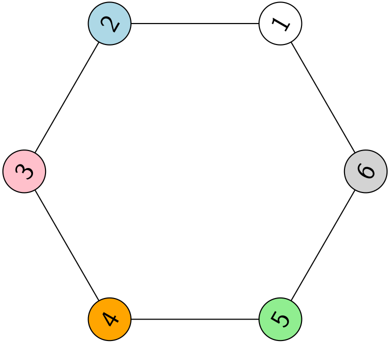
2 次元図形の回転対称性：例 — 組合せ的な見方 (1)

頂点を区別してみる



2 次元図形の回転対称性：例 — 組合せ的な見方 (1)

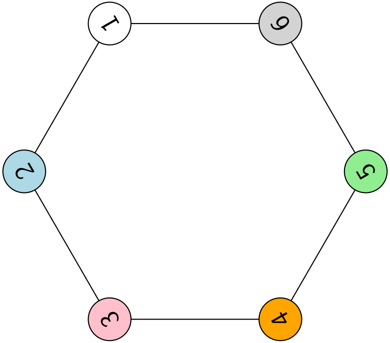
頂点を区別してみる



60° 回転

2 次元図形の回転対称性：例 — 組合せ的な見方 (1)

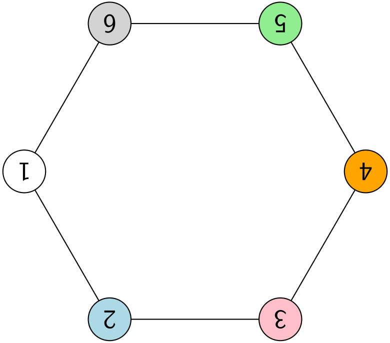
頂点を区別してみる



120° 回転

2 次元図形の回転対称性：例 — 組合せ的な見方 (1)

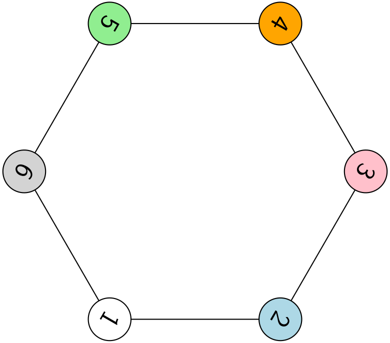
頂点を区別してみる



180° 回転

2 次元図形の回転対称性：例 — 組合せ的な見方 (1)

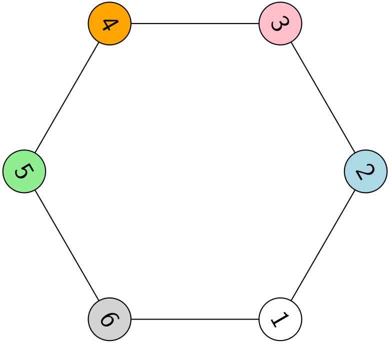
頂点を区別してみる



240° 回転

2 次元図形の回転対称性：例 — 組合せ的な見方 (1)

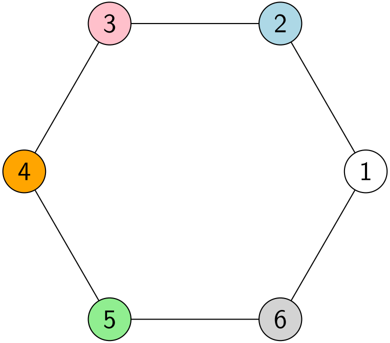
頂点を区別してみる



300° 回転

2 次元図形の回転対称性：例 — 組合せ的な見方 (1)

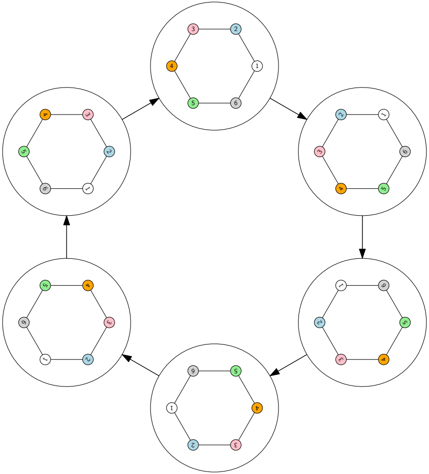
頂点を区別してみる



360° 回転 ← 0° 回転と同じ

2 次元図形の回転対称性：例 — 組合せ的な見方 (2)

60° 回転の連続による移り変わり



2 次元図形の回転対称性：例 — 組合せ的な見方 (3)

2 次元図形が複素平面上にあると思えば，

- 60° 回転は複素数 $z = \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/3}$ で表される

このとき，

- 120° 回転は $z^2 = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$
- 180° 回転は $z^3 = \mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}/3}$
- 240° 回転は $z^4 = \mathrm{e}^{4\pi\mathrm{i}/3}$
- 300° 回転は $z^5 = \mathrm{e}^{5\pi\mathrm{i}/3}$
- 360° 回転は $z^6 = \mathrm{e}^{6\pi\mathrm{i}/3} = 1$
- 420° 回転は $z^7 = \mathrm{e}^{7\pi\mathrm{i}/3} = z$

60° 回転と 420° 回転が同じ複素数で表される

つまり，正六角形の回転対称性は集合として
$\{1, z, z^2, z^3, z^4, z^5\}$ で表される

2 次元図形の回転対称性：例 — 組合せ的な見方 (3)

2 次元図形が複素平面上にあると思えば,

- 60° 回転は複素数 $z = \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}/3}$ で表される

このとき,

- 120° 回転は $z^2 = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}/3}$
- 180° 回転は $z^3 = \mathrm{e}^{3\pi \mathrm{i}/3}$
- 240° 回転は $z^4 = \mathrm{e}^{4\pi \mathrm{i}/3}$
- 300° 回転は $z^5 = \mathrm{e}^{5\pi \mathrm{i}/3} = z^{-1}$
- 360° 回転は $z^6 = \mathrm{e}^{6\pi \mathrm{i}/3} = 1$
- 420° 回転は $z^7 = \mathrm{e}^{7\pi \mathrm{i}/3} = z$

60° 回転と 420° 回転が同じ複素数で表される

つまり，正六角形の回転対称性は集合として
$\{1, z, z^2, z^3, z^4, z^5\}$ で表される

2 次元図形の回転対称性：例 — 組合せ的な見方 (4)

つまり，正六角形の回転対称性は集合として
$\{1, z, z^2, z^3, z^4, z^5\}$ で表される

結論

z を，回転 (rotation) の r という記号で表すと，
正六角形の回転対称性を次にように表せる

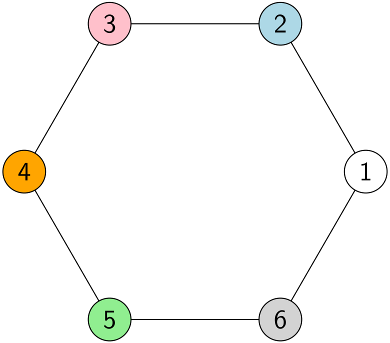
- 記号：r (← 生成元)
- 規則：$r^6 = 1$ (← 基本関係)

これを記号で，$\langle r \mid r^6 = 1 \rangle$ と書く (← 群の表示)

2 次元図形の回転・鏡映対称性：例

問題

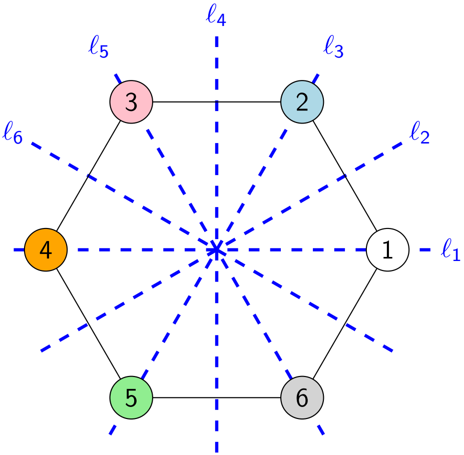
正六角形を回転と直線を軸とした鏡映の合成で同じ図形に変換する方法は何通りあるか？(ただし，同じ配置に戻るものは別にして数えない)



まず，鏡映だけ考えてみる

2 次元図形の回転・鏡映対称性：例 — 鏡映軸

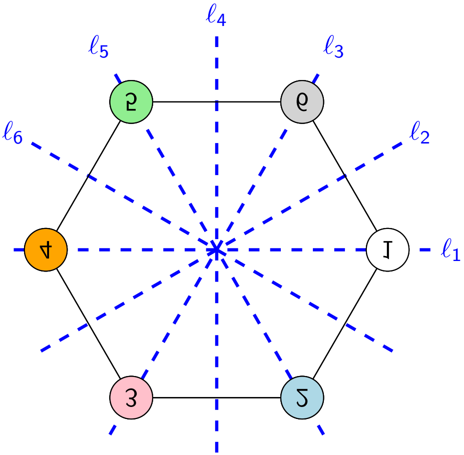
鏡映軸は 6 つ



実際に，ℓ_1 に沿って鏡映させてみる

2 次元図形の回転・鏡映対称性：例 — 鏡映軸

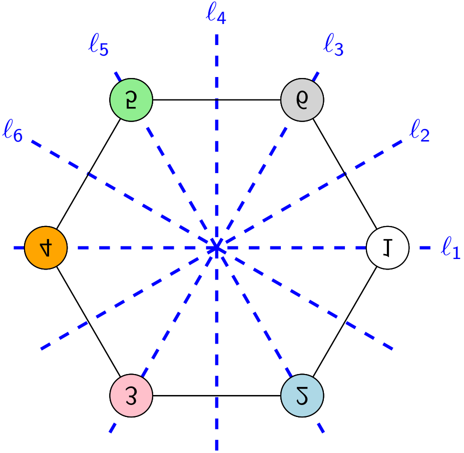
鏡映軸は 6 つ



実際に，ℓ_1 に沿って鏡映させてみる

2 次元図形の回転・鏡映対称性：例 — 鏡映軸

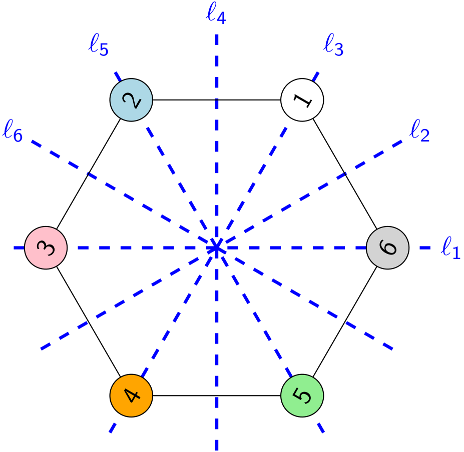
鏡映軸は 6 つ



ℓ_1 に沿って鏡映させてから，ℓ_2 に沿って鏡映させてみる

2 次元図形の回転・鏡映対称性：例 — 鏡映軸

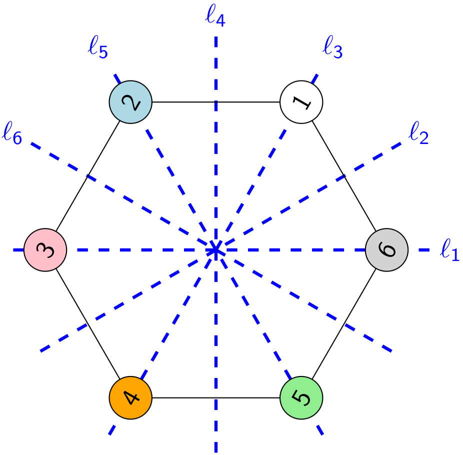
鏡映軸は 6 つ



ℓ_1 に沿って鏡映させてから，ℓ_2 に沿って鏡映させてみる

2 次元図形の回転・鏡映対称性：例 — 鏡映軸

鏡映軸は 6 つ



これは，反時計回り 60° 回転と同じ

2 次元図形の回転・鏡映対称性：例 — 鏡映と回転

まとめ

ℓ_1 に沿って鏡映させてから，ℓ_2 に沿って鏡映することは
反時計回り 60° 回転と同じ

ℓ_i に沿った鏡映を s_i と書くと，

$$s_2 s_1 = r$$

つまり，鏡映と回転は「関係」を持っている

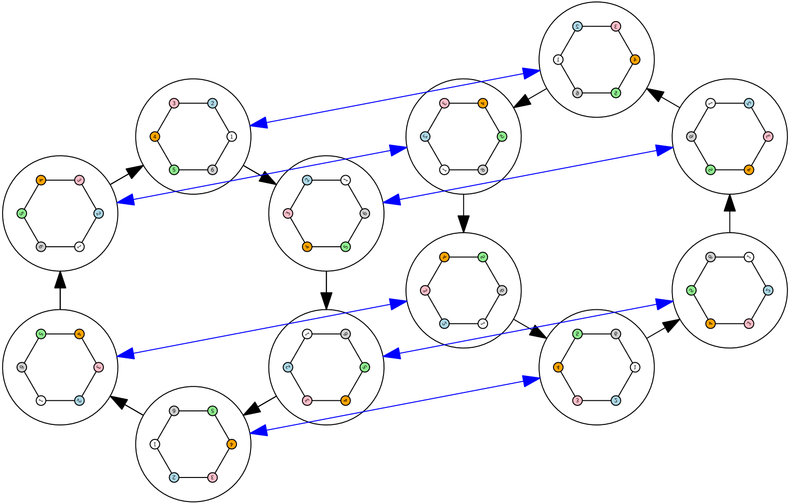
疑問

- どんな関係を持っているのか？
- どれだけの関係を書けば，足りるのか？

$\rightsquigarrow$ 組合せ的に見てみる

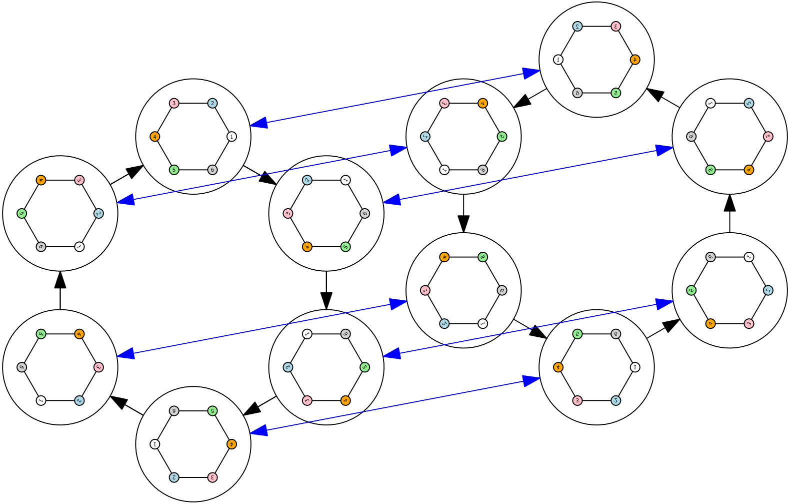
2 次元図形の回転・鏡映対称性：例 — 組合せ的な見方 (1)

実現できる配置は 12 通り存在する



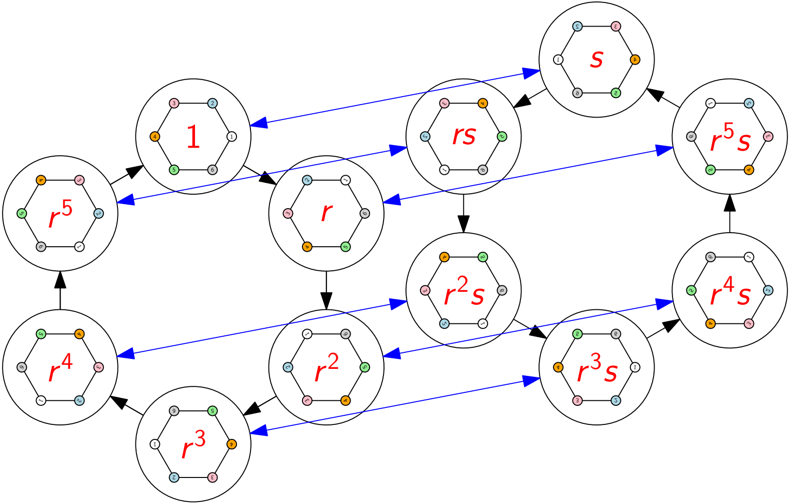
2 次元図形の回転・鏡映対称性：例 — 組合せ的な見方 (2)

黒矢印 は 60° 回転，青矢印 は 鉛直な直線 ℓ_4 に沿った鏡映



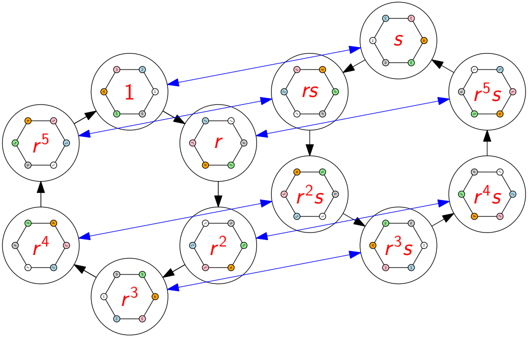
2 次元図形の回転・鏡映対称性：例 — 組合せ的な見方 (3)

60° 回転を r，ℓ_4 に沿った鏡映を s と書くと，⋯



2 次元図形の回転・鏡映対称性：例 — 組合せ的な見方 (4)

60° 回転を r，ℓ_4 に沿った鏡映を s と書くと，…

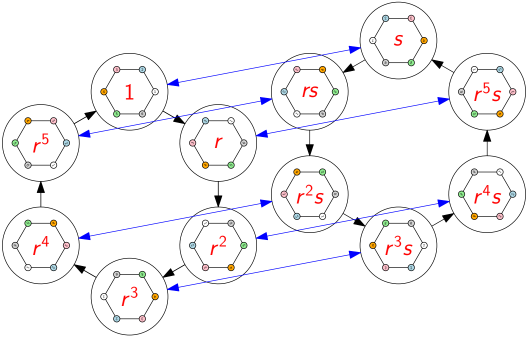


観察 (例)

- $s^2 = 1$
- $rsr = s$
- $srs = r^5$

2 次元図形の回転・鏡映対称性：例 — 組合せ的な見方 (4)

60° 回転を r，ℓ_4 に沿った鏡映を s と書くと，…



観察 (例)

- $s^2 = 1$
- $rsr = s \rightsquigarrow rsrs = rsr \cdot s = s \cdot s = 1$
- $srs = r^5$

2 次元図形の回転・鏡映対称性：例 — 組合せ的な見方 (5)

つまり，正六角形の回転・鏡映対称性は集合として
$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, rs, r^2s, r^3s, r^4s, r^5s\}$ で表される

結論

次の記号と規則の組で表せる

- 記号：r, s （$\leftarrow$ 生成元）
- 規則：$r^6 = 1, s^2 = 1, rsrs = 1$ （$\leftarrow$ 基本関係）

これを記号で，$\langle r, s \mid r^6 = 1, s^2 = 1, rsrs = 1 \rangle$ と書く （$\leftarrow$ 群の表示）

2 次元図形の回転・鏡映対称性：例 — 組合せ的な見方 (5)

群の表示：$\langle r, s \mid r^6 = 1, s^2 = 1, rsrs = 1 \rangle$

ここから，機械的に次のような「計算」ができる

$$
\begin{aligned}
r^2sr^3sr^2 &= r \cdot rsr \cdot r \cdot rsr \cdot r \\
&= r \cdot rsr \cdot s^2 \cdot r \cdot rsr \cdot s^2 \cdot r && (s^2 = 1) \\
&= r \cdot (rsrs) \cdot s \cdot r \cdot (rsrs) \cdot s \cdot r \\
&= r \cdot 1 \cdot s \cdot r \cdot 1 \cdot s \cdot r && (rsrs = 1) \\
&= rsrsr \\
&= r && (rsrs = 1)
\end{aligned}
$$

2 次元図形の回転・鏡映対称性：例 — 組合せ的な見方 (6)

群の表示：$\langle r, s \mid r^6 = 1, s^2 = 1, rsrs = 1 \rangle$

疑問

関係は「$r^6 = 1, s^2 = 1, rsrs = 1$」で十分なのだろうか？

つまり，r と s を適当に並べたものは，必ず集合
$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, rs, r^2s, r^3s, r^4s, r^5s\}$ の要素となるか？

例

$$
\begin{aligned}
rs^2r^3s^4r^5s^7 &= r^4s^4r^5s^7 && (s^2 = 1) \\
&= r^4(s^2)^2r^5(s^2)^3s \\
&= r^9s && (s^2 = 1) \\
&= r^6r^3s \\
&= r^3s && (r^6 = 1)
\end{aligned}
$$

そのためには，群表を考えればよい

2 次元図形の回転・鏡映対称性：例 — 群表

$$\langle r, s \mid r^6 = 1, s^2 = 1, rsrs = 1 \rangle$$

	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	rs	r^2s	r^3s	r^4s	r^5s
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	rs	r^2s	r^3s	r^4s	r^5s
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1	rs	r^2s	r^3s	r^4s	r^5s	s
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2s	r^3s	r^4s	r^5s	s	rs
r^3	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3s	r^4s	r^5s	s	rs	r^2s
r^4	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4s	r^5s	s	rs	r^2s	r^3s
r^5	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5s	s	rs	r^2s	r^3s	r^4s
s	s	r^5s	r^4s	r^3s	r^2s	rs	1	r^5	r^4	r^3	r^2	r
rs	rs	s	r^5s	r^4s	r^3s	r^2s	r	1	r^5	r^4	r^3	r^2
r^2s	r^2s	rs	s	r^5s	r^4s	r^3s	r^2	r	1	r^5	r^4	r^3
r^3s	r^3s	r^2s	rs	s	r^5s	r^4s	r^3	r^2	r	1	r^5	r^4
r^4s	r^4s	r^3s	r^2s	rs	s	r^5s	r^4	r^3	r^2	r	1	r^5
r^5s	r^5s	r^4s	r^3s	r^2s	rs	s	r^5	r^4	r^3	r^2	r	1

注意点：左端と上端に並んでいる要素だけが表に現れる

2 次元図形の回転・鏡映対称性：例 — 群表

$\langle r, s \mid r^6 = 1, s^2 = 1, rsrs = 1 \rangle$

例：$r^4 s \cdot rs = r^3 rsrs = r^3 s^2 = r^3$

	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	rs	r^2s	r^3s	r^4s	r^5s
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	rs	r^2s	r^3s	r^4s	r^5s
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1	rs	r^2s	r^3s	r^4s	r^5s	s
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2s	r^3s	r^4s	r^5s	s	rs
r^3	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3s	r^4s	r^5s	s	rs	r^2s
r^4	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4s	r^5s	s	rs	r^2s	r^3s
r^5	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5s	s	rs	r^2s	r^3s	r^4s
s	s	r^5s	r^4s	r^3s	r^2s	rs	1	r^5	r^4	r^3	r^2	r
rs	rs	s	r^5s	r^4s	r^3s	r^2s	r	1	r^5	r^4	r^3	r^2
r^2s	r^2s	rs	s	r^5s	r^4s	r^3s	r^2	r	1	r^5	r^4	r^3
r^3s	r^3s	r^2s	rs	s	r^5s	r^4s	r^3	r^2	r	1	r^5	r^4
r^4s	r^4s	r^3s	r^2s	rs	s	r^5s	r^4	r^3	r^2	r	1	r^5
r^5s	r^5s	r^4s	r^3s	r^2s	rs	s	r^5	r^4	r^3	r^2	r	1

注意点：左端と上端に並んでいる要素だけが表に現れる

2 次元図形の回転・鏡映対称性：例 — 群表 (続き)

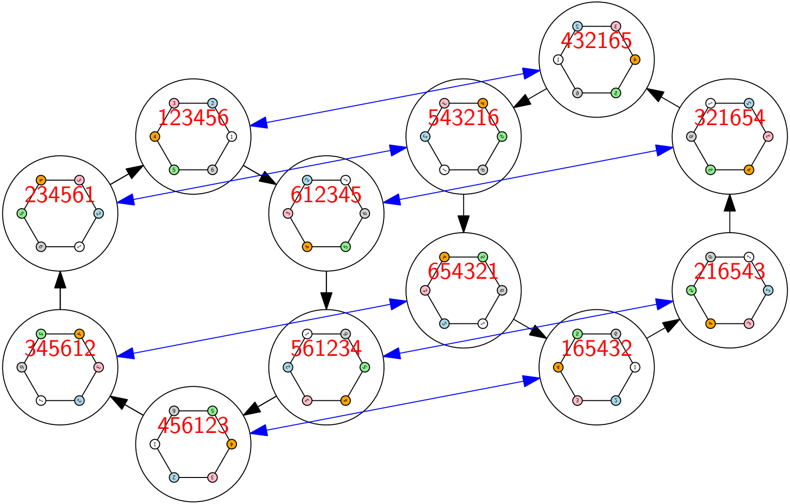
群表を見れば，機械的に簡略化できる

$$
\begin{aligned}
rs^2r^3s^4r^5s^7 &= (rs \cdot s) \cdot sr^3s^4r^5s^7 \\
&= r \cdot sr^3s^4r^5s^7 && (rs \cdot s = r) \\
&= (rs \cdot r^3s) \cdot s^3r^5s^7 \\
&= r^4 \cdot s^3r^5s^7 && (rs \cdot r^3s = r^4) \\
&= (r^4s \cdot s) \cdot s^2r^5s^7 \\
&= r^4 \cdot s^2r^5s^7 && (r^4s \cdot s = r^4) \\
&\ \ \vdots \\
&= r^3s
\end{aligned}
$$

これによって，最終的に集合 $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, rs, r^2s, r^3s, r^4s, r^5s\}$ の要素が必ず得られる

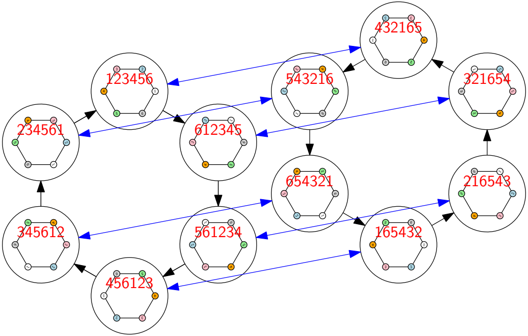
2 次元図形の回転・鏡映対称性：例 — 置換としての見方 (1)

右端から反時計回りに，頂点の番号を並べてみる

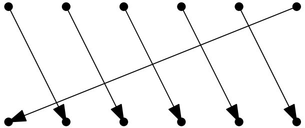


2 次元図形の回転・鏡映対称性：例 — 置換としての見方 (2)

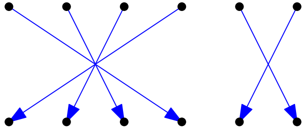
右端から反時計回りに，頂点の番号を並べてみる



黒矢印

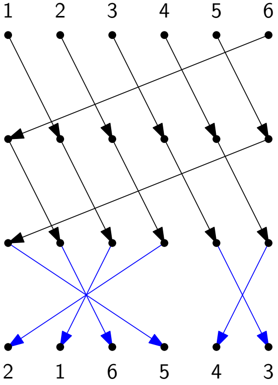


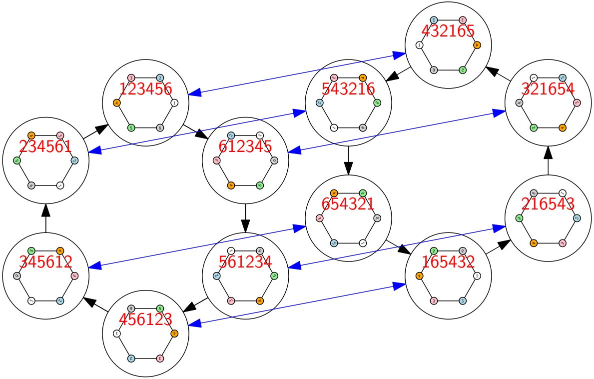
青矢印



2 次元図形の回転・鏡映対称性：例 — 置換としての見方 (3)

置換の合成によって得られる番号付け

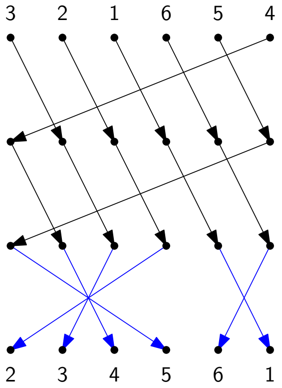


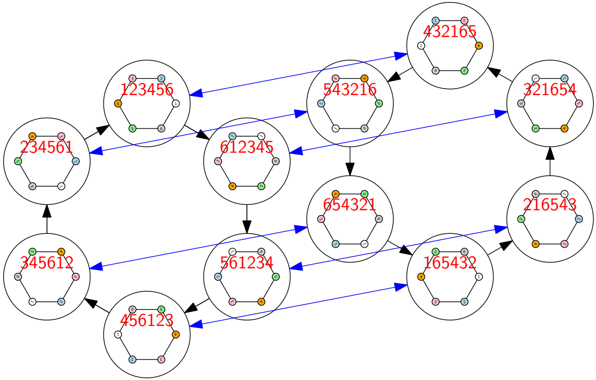


123456 を 216543 に写す写像は，黒→黒→青で表される

2 次元図形の回転・鏡映対称性：例 — 置換としての見方 (3)

置換の合成によって得られる番号付け





2 次元図形の対称性：まとめ

2 次元図形の対称性

- 回転に関する不変性
- 鏡映に関する不変性

変換の記述

- 語による (群の表示)
- 置換による (群の置換表現)

「群」の定義は次回行う

「語」に関する用語

集合 X

定義：語とは？

集合 X 上の**語**とは，X の要素を並べたもの

例：$X = \{a, b\}$ のとき，aa, aba, $bbaab$ は X 上の語

語の略記法

- aa を a^2 と書く
- aaa を a^3 と書く
- a を n 個並べてできる語を a^n と書く

このとき，指数法則が成り立つ：$a^{m+n} = a^m a^n$，$(a^m)^n = a^{mn}$

定義：空語

X の要素を何も並べずにできる語を**空語**という
この講義では 1 と表記する　　(文献によっては，e や ε と表記する)

「群の表示」に関する用語

群の定義は次回行う

記法：「逆」要素の集合

有限集合 X に対して，その各要素 $x \in X$ の「逆要素」x^{-1} を集めた集合を $X^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in X\}$ と書くことにする

定義：群の表示

有限集合 X と，$X \cup X^{-1}$ 上の語が満たす関係式 $r_1, r_2, \ldots, r_k$ に対して，$\langle X \mid r_1, r_2, \ldots, r_k \rangle$ と書いたら，$X \cup X^{-1}$ 上の語で，関係式 $r_1, r_2, \ldots, r_k$ を用いて簡略化したものの集合を表すとする
(ただし，任意の $x \in X$ に対して，$xx^{-1} = x^{-1}x = 1$ と簡略化してよい)

正六角形の回転・鏡映対称性の例では，$\langle r, s \mid r^6 = 1, s^2 = 1, rsrs = 1 \rangle$

- $X = \{r, s\}$
- $k = 3$, $r_1\colon r^6 = 1$, $r_2\colon s^2 = 1$, $r_3\colon rsrs = 1$

「簡略化」を正確に定義するには，同値類を使う (この講義では省略)

「逆」要素に関する補足

正六角形の回転・鏡映対称性の例では，$\langle r, s \mid r^6 = 1, s^2 = 1, rsrs = 1 \rangle$

- r：反時計回り 60° 回転
- s：鉛直直線に対する鏡映

これらに対する逆操作が「逆」要素に対応する

- r^{-1}：時計回り 60° 回転 (反時計回り −60° 回転)
- s^{-1}：鉛直直線に対する鏡映 (つまり，$s^{-1} = s$)

簡略化の例

$$
\begin{aligned}
r^4 s^{-1} r^{-2} s &= r^4 s r^{-2} s && (s^2 = 1) \\
&= r^4 s r^4 s && (r^6 = 1) \\
&= 1 && (\text{群表より}, r^4 s \cdot r^4 s = 1)
\end{aligned}
$$

「置換」に関する用語

集合 X

定義：置換とは？

X 上の置換とは，全単射 $f\colon X \to X$ のこと

$X = \{1, 2, \ldots, n\}$ のとき，置換 $f\colon X \to X$ を

$$(f(1), f(2), \ldots, f(n))$$

のように表すことがある

例

記法 $(1, 4, 2, 3)$ が表す置換 f は

$$f(1) = 1, f(2) = 4, f(3) = 2, f(3) = 4$$

$(1, 4, 2, 3)$ を略して，1423 と書くことも多い

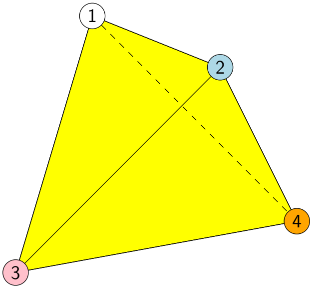
目次

1. 2 次元図形の対称性
2. 3 次元図形の対称性
3. グラフの対称性
4. 今日のまとめ

正四面体の回転対称性

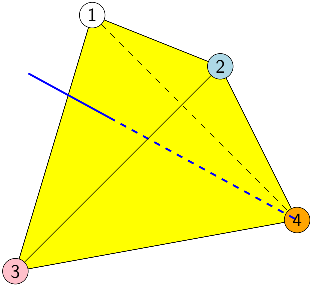
問題

正四面体を回転で同じ図形に変換する方法は何通りあるか？
(ただし，同じ配置に戻るものは別にして数えない)



正四面体の回転対称性：2 種類の回転 (1)

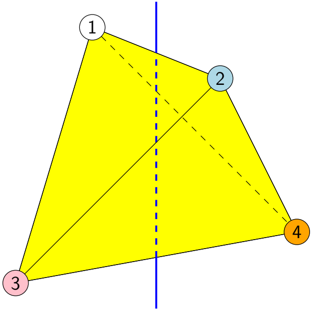
回転には 2 種類：頂点を通る軸回りの回転



そのような軸は 4 つある

正四面体の回転対称性：2 種類の回転 (2)

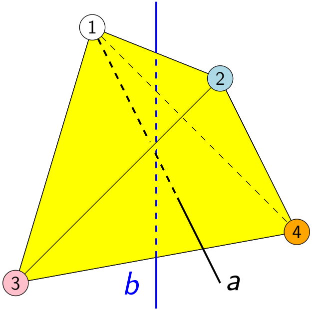
回転には 2 種類：向かい合う 2 辺の中点を通る軸回りの回転



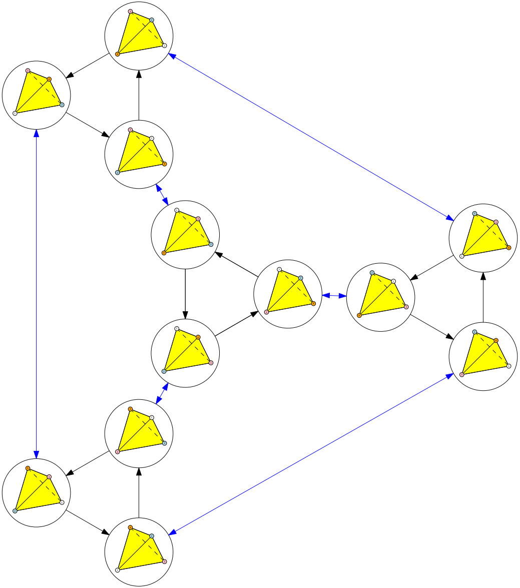
そのような軸は 3 つある

正四面体の回転対称性：2 種類の回転 (3)

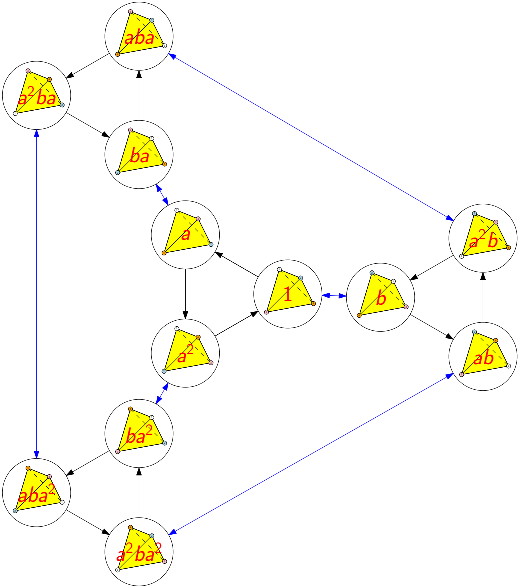
黒い軸回りの 120° 回転 と 青い軸回りの 180° 回転 の合成を考える



正四面体の回転対称性：2 つの回転からすべての配置が生まれる



正四面体の回転対称性：2 つの回転からすべての配置が生まれる



正四面体の回転対称性 と 正六角形の回転・鏡映対称性

先ほどの a, b を用いると，正四面体の回転対称性は次のように書ける

- $\{1, a, a^2, b, ab, a^2b, ba, aba, a^2ba, ba^2, aba^2, a^2ba^2\}$
- $\langle a, b \mid a^3 = 1, b^2 = 1, ababab = 1 \rangle$

復習：正六角形の回転・鏡映対称性は次のように書ける

- $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, rs, r^2s, r^3s, r^4s, r^5s\}$
- $\langle r, s \mid r^6 = 1, s^2 = 1, rsrs = 1 \rangle$

疑問?

この 2 つの「対称性」は本質的に同じものなのか？

- どちらも，要素数 (位数) が 12

$\rightsquigarrow$ 次回の内容 (群の同型性)

目次

1. 2 次元図形の対称性
2. 3 次元図形の対称性
3. グラフの対称性
4. 今日のまとめ

復習：グラフの定義

定義：無向グラフとは？

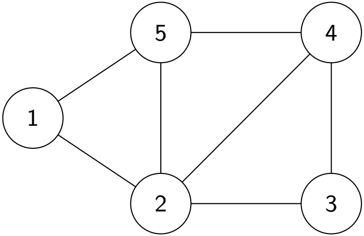
無向グラフとは，順序対 (V, E) で，

- V は集合
- $E \subseteq 2^V$ は V の要素数 2の部分集合の集合

であるもののこと

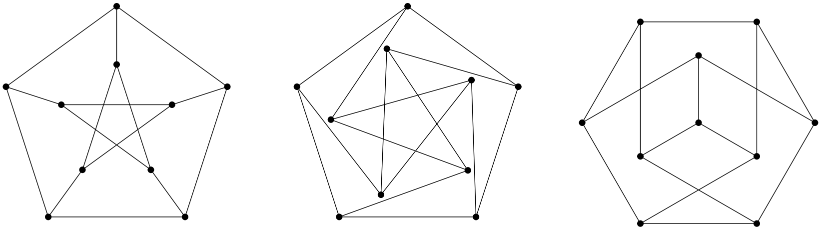
例：

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$



グラフの対称性？

図はグラフではないので，
描かれた様を用いて対称性を議論するべきではない



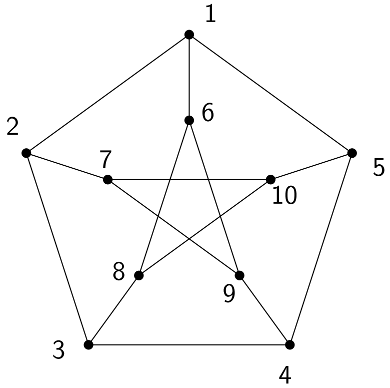
図とは無関係な操作を考えないといけない $\rightsquigarrow$ 頂点の置換

グラフの対称性：定義に対する直感

グラフの対称性は，次のように考える

1. 頂点の番号を並び替えてみる
2. 辺の有無が保存されているか確認する

保存されていれば，その並び替えに関する対称性があると言える

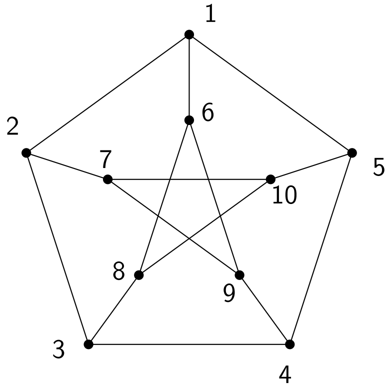


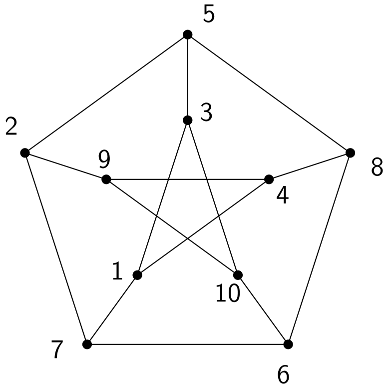
グラフの対称性：定義に対する直感

グラフの対称性は，次のように考える

1. 頂点の番号を並び替えてみる
2. 辺の有無が保存されているか確認する

保存されていれば，その並び替えに関する対称性があると言える



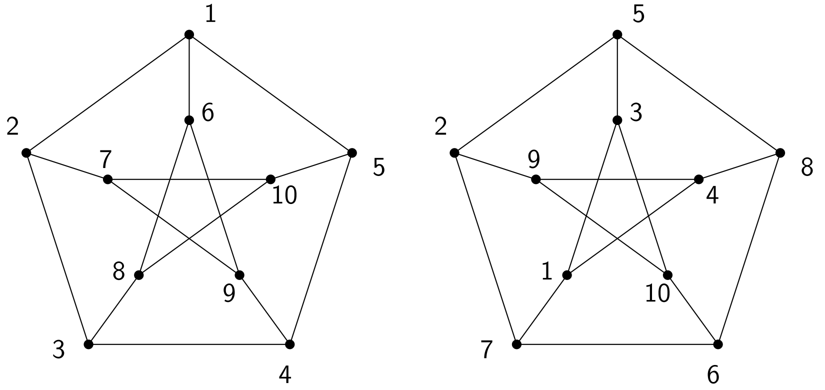


グラフの対称性：定義に対する直感

グラフの対称性は，次のように考える

1. 頂点の番号を並び替えてみる
2. 辺の有無が保存されているか確認する

保存されていれば，その並び替えに関する対称性があると言える



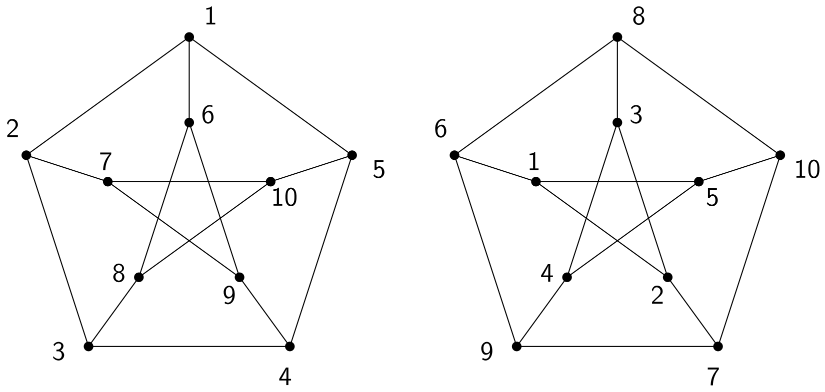
左には $\{1, 2\}$ があり，右には $\{1, 2\}$ がない $\rightsquigarrow$ 辺の有無が保存されない

グラフの対称性：定義に対する直感

グラフの対称性は，次のように考える

1. 頂点の番号を並び替えてみる
2. 辺の有無が保存されているか確認する

保存されていれば，その並び替えに関する対称性があると言える

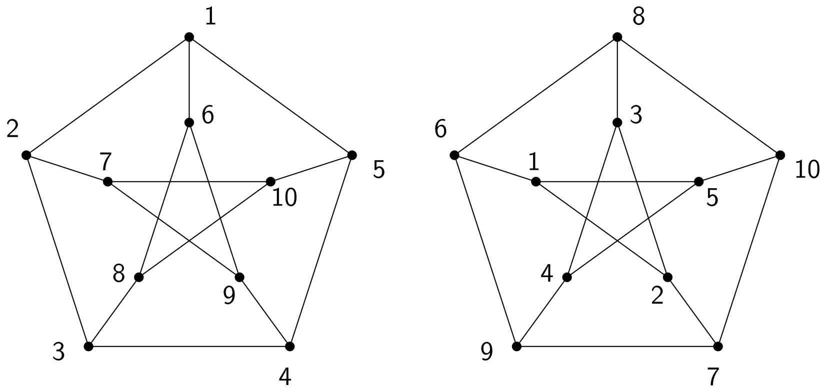


グラフの対称性：定義に対する直感

グラフの対称性は，次のように考える

1. 頂点の番号を並び替えてみる
2. 辺の有無が保存されているか確認する

保存されていれば，その並び替えに関する対称性があると言える



辺の有無が保存されている

グラフの自己同型写像

対称性を与える置換を自己同型写像という

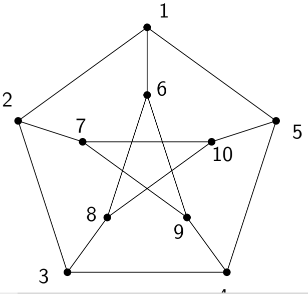
定義：グラフの自己同型写像とは？

無向グラフ $G = (V, E)$ の**自己同型写像**とは，
V 上の置換 $f\colon V \to V$ で，次を満たすもののこと

$$\{u, v\} \in E \quad \Leftrightarrow \quad \{f(u), f(v)\} \in E$$

$\boxed{\text{例}}$：次の置換 f は このグラフの自己同型写像

$$
\begin{array}{lll}
f(1) = 7, & f(2) = 9, & f(3) = 6, \\
f(4) = 8, & f(5) = 10, & f(6) = 2, \\
f(7) = 4, & f(8) = 1, & f(9) = 3, \\
f(10) = 5 & &
\end{array}
$$



例えば，$\{1, 6\} \in E$ であり，
$\{f(1), f(6)\} = \{7, 2\} \in E$

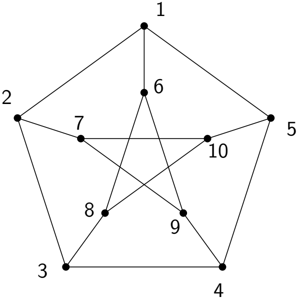
グラフの自己同型写像 (続)

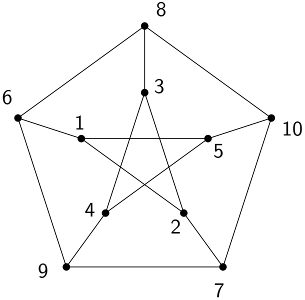
直感

自己同型写像とは,「辺の有無を保存する」置換だと思えばよい

$\boxed{例}$: 次の置換 f は このグラフの自己同型写像

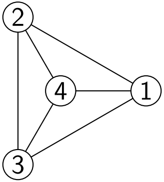
$$
\begin{array}{lllll}
f(1)=7, & f(2)=9, & f(3)=6, & f(4)=8, & f(5)=10, \\
f(6)=2, & f(7)=4, & f(8)=1, & f(9)=3, & f(10)=5
\end{array}
$$





例題 1：次のグラフには いくつ自己同型写像が あるか？

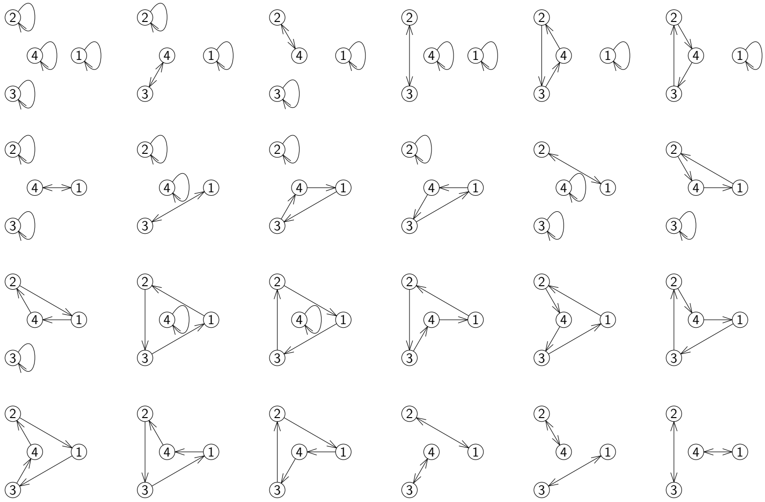
(頂点数 4 の完全グラフと呼ばれ，K_4 と書くことがある)



- どのような置換も自己同型写像
- ∴ 自己同型写像の総数 $= 4! = 24$

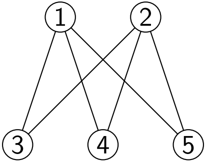
例題 1：次のグラフには いくつ自己同型写像が あるか？ (2)

自己同型写像をすべて描いてみた



例題 2：次のグラフには いくつ自己同型写像が あるか？

(完全二部グラフと呼ばれ，$K_{2,3}$ と書くことがある)



すべての置換が自己同型写像であるわけではない

グラフにおける頂点の次数

無向グラフ $G = (V, E)$，頂点 $v \in V$

定義：頂点の近傍集合とは？

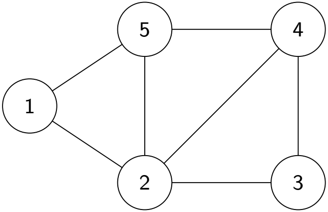
G における v の近傍集合とは，G において v と隣接する頂点全体の集合

$$N_G(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}$$

定義：頂点の次数とは？

G における v の次数とは，G において v と隣接する頂点の総数

$$\deg_G(v) = |N_G(v)|$$



$N_G(1) = \{2, 5\}$
$N_G(4) = \{2, 3, 5\}$
$\deg_G(1) = 2$
$\deg_G(4) = 3$

自己同型写像の性質：次数

無向グラフ $G = (V, E)$，頂点 $v \in V$，G の自己同型写像 $f \colon V \to V$

性質：自己同型写像と次数

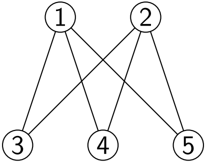
$$\deg_G(v) = \deg_G(f(v))$$

証明：

- f は自己同型写像なので,「$u \in N_G(v) \Leftrightarrow f(u) \in N_G(f(v))$」となる
- f は自己同型写像なので，特に f は置換 (全単射)
- $\therefore |N_G(v)| = |N_G(f(v))|$
- 次数の定義より，$\deg_G(v) = \deg_G(f(v))$ □

例題 2：次のグラフには いくつ自己同型写像が あるか？ (2)

(完全二部グラフと呼ばれ，$K_{2,3}$ と書くことがある)



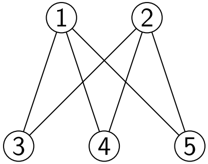
f をこのグラフの自己同型写像とする

- 各頂点の次数を見ると，f によって，
  $\{1, 2\}$ は $\{1, 2\}$ に写され，$\{3, 4, 5\}$ は $\{3, 4, 5\}$ に写される

$\therefore$ 自己同型写像の総数 $\leq 2! \cdot 3! = 2 \cdot 6 = 12$

例題 2：次のグラフには いくつ自己同型写像が あるか？ (2)

(完全二部グラフと呼ばれ，$K_{2,3}$ と書くことがある)



f をこのグラフの自己同型写像とする

- 各頂点の次数を見ると，f によって，
  $\{1, 2\}$ は $\{1, 2\}$ に写され，$\{3, 4, 5\}$ は $\{3, 4, 5\}$ に写される

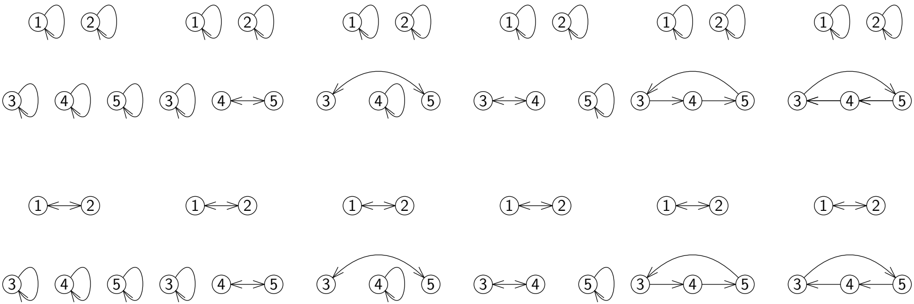
$\therefore$ 自己同型写像の総数 $\leq 2! \cdot 3! = 2 \cdot 6 = 12$

- また，そのように写したものは，すべて自己同型写像である
  (確認せよ)

$\therefore$ 自己同型写像の総数 $= 12$ □

例題 2：次のグラフには いくつ自己同型写像が あるか？ (3)

自己同型写像をすべて描いてみた



12 の対称性を持つ構造

つまり，次の 3 種類の対称性はどれも「12 個の要素」を持つと分かった

- 正六角形の回転・鏡映対称性
- 正四面体の回転対称性
- グラフ $K_{2,3}$ の自己同型

疑問?

この 3 つの「対称性」は本質的に同じものなのか？

$\rightsquigarrow$ 次回の内容 (群の同型性)

$K_{2,3}$ の自己同型写像：群表

置換の合成はまた置換なので (演習問題)，群表が書ける

	12345	12354	12435	12453	12534	12543
12345	12345	12354	12435	12453	12534	12543
12354	12354	12345	12453	12435	12543	12534
12435	12435	12534	12345	12543	12354	12453
12453	12453	12543	12354	12534	12345	12435
12534	12534	12435	12543	12345	12453	12354
12543	12543	12453	12534	12354	12435	12345
21345	21345	21354	21435	21453	21534	21543
21354	21354	21345	21453	21435	21543	21534
21435	21435	21534	21345	21543	21354	21453
21453	21453	21543	21354	21534	21345	21435
21534	21534	21435	21543	21345	21453	21354
21543	21543	21453	21534	21354	21435	21345

(次ページに続く)

$K_{2,3}$ の自己同型写像：群表 (続)

置換の合成はまた置換なので (演習問題)，群表が書ける

	21345	21354	21435	21453	21534	21543
12345	21345	21354	21435	21453	21534	21543
12354	21354	21345	21453	21435	21543	21534
12435	21435	21534	21345	21543	21354	21453
12453	21453	21543	21354	21534	21345	21435
12534	21534	21435	21543	21345	21453	21354
12543	21543	21453	21534	21354	21435	21345
21345	12345	12354	12435	12453	12534	12543
21354	12354	12345	12453	12435	12543	12534
21435	12435	12534	12345	12543	12354	12453
21453	12453	12543	12354	12534	12345	12435
21534	12534	12435	12543	12345	12453	12354
21543	12543	12453	12534	12354	12435	12345

目次

1 2 次元図形の対称性

2 3 次元図形の対称性

3 グラフの対称性

4 今日のまとめ

今日の目標

今日の目標

様々な対象に対して，置換を用いて対称性を記述できるようになる

- 2 次元図形の対称性 $\rightsquigarrow$ 回転，鏡映とそれらの合成
- 3 次元図形の対称性 $\rightsquigarrow$ 回転，鏡映とそれらの合成
- グラフの対称性 $\rightsquigarrow$ 自己同型写像

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員と TA は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次

1. 2 次元図形の対称性
2. 3 次元図形の対称性
3. グラフの対称性
4. 今日のまとめ