

離散数理工学 第 1 回
数え上げの基礎：二項係数と二項定理

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2019 年 10 月 1 日

最終更新：2019 年 10 月 3 日 08:44

概要

主題

次の3つを道具として

離散システム／アルゴリズムの設計と解析に関する方法論を学習する

- ▶ 数え上げ組合せ論
- ▶ 代数系
- ▶ 離散確率論

キャッチフレーズ：「離散数学を使う」

達成目標：以下の3項目をすべて達成することを目標とする

- 1 数え上げ組合せ論，代数系，離散確率論における用語を正しく使うことができる
- 2 数え上げ組合せ論，代数系，離散確率論における典型的な論法を用いて，証明を行うことができる
- 3 数え上げ組合せ論，代数系，離散確率論を用いて，離散システム／アルゴリズムの設計と解析ができる

概要

主題

次の3つを道具として

離散システム／アルゴリズムの設計と解析に関する方法論を学習する

- ▶ 数え上げ組合せ論
- ▶ 代数系
- ▶ 離散確率論

キャッチフレーズ：「離散数学を使う」

達成目標：以下の3項目をすべて達成することを目標とする

- 1 数え上げ組合せ論，代数系，離散確率論における用語を正しく使うことができる
- 2 数え上げ組合せ論，代数系，離散確率論における典型的な論法を用いて，証明を行うことができる
- 3 数え上げ組合せ論，代数系，離散確率論を用いて，離散システム／アルゴリズムの設計と解析ができる

典型的な問題 1 : 誕生日のパラドックス

誕生日問題 : 設定

この部屋の中に、誕生日が同じ2人はいるか？
そのような2人がいる確率は？

⇒ 実際にやってみる

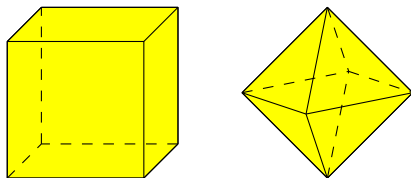
応用, 関連する話題

- ▶ 暗号に対する攻撃 (誕生日攻撃)
- ▶ 負荷分散

典型的な問題 2 : 図形の対称性

問題

立方体と正八面体, どちらの対称性が高いか?



⇒ 対称性を比較する数学的道具が必要

⇒ 有限群

スケジュール 前半 (予定)

- | | | |
|---|----------------------|---------|
| 1 | 数え上げの基礎：二項係数と二項定理 | (10/1) |
| 2 | 数え上げの基礎：漸化式の立て方 | (10/8) |
| 3 | 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎) | (10/15) |
| ★ | 休み (祝日) | (10/22) |
| 4 | 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展) | (10/29) |
| 5 | 離散代数：図形とグラフの対称性 | (11/5) |
| 6 | 離散代数：有限群 | (11/12) |
| 7 | 離散代数：有限群の構造 | (11/19) |
| 8 | 離散代数：グラフの対称性と有限群 | (11/26) |

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

- | | | |
|----|---------------------------|---------|
| 9 | 離散確率論：確率的離散システムの解析 (基礎) | (12/3) |
| ★ | 中間試験 | (12/10) |
| 10 | 離散確率論：確率的離散システムの解析 (発展) | (12/17) |
| 11 | 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎) | (1/7) |
| 12 | 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展) | (1/14) |
| 13 | 離散確率論：マルコフ連鎖 (基礎) | (1/21) |
| 14 | 離散確率論：マルコフ連鎖 (発展) | (1/28) |
| ★ | 授業等調整日 | (2/4) |
| ★ | 期末試験 | (2/14?) |

注意：予定の変更もありうる

教員

- ▶ 岡本 吉央 (おかもと よしお)
- ▶ 居室：西 4 号館 2 階 206 号室
- ▶ E-mail：okamotoy@uec.ac.jp
- ▶ Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/

ティーチング・アシスタント (TA)

- ▶ 坂本 涼太 (さかもと りょうた)
- ▶ 居室：西 4 号館 2 階 202 号室 (岡本研究室)

講義資料

- ▶ Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2019/dme/
- ▶ 注意：資料の印刷等は各学生が自ら行う
- ▶ 講義前日の夕方 16 時までに、ここに置かれる

講義資料

<http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2019/dme/>

- ▶ スライド
- ▶ 印刷用スライド : 8 枚のスライドを 1 ページに収めたもの
- ▶ 演習問題
- ▶ 用語集

「印刷用スライド」と「演習問題」は各自印刷して持参すると便利

Twitter: @okamoto7yoshio

講義資料が掲載されたら一言発せられる (手動更新)

授業の進め方

講義 (75分)

- ▶ スライドと板書で進める
- ▶ スライドのコピーに重要事項のメモを取る

演習 (15分)

- ▶ 演習問題に取り組む
- ▶ 不明な点は教員に質問する

退室 (0分) ←重要

- ▶ コメント (授業の感想, 質問など) を紙に書いて提出する (匿名可)
- ▶ コメントとそれに対する回答は (匿名で) 講義ページに掲載される

オフィスアワー (アポイントメントによる)

- ▶ 質問など

演習問題

演習問題の進め方

- ▶ 授業の終わり 15 分は演習問題を解く時間
- ▶ 残った演習問題は復習・試験対策用
- ▶ 注意: 「模範解答」のようなものは存在しない

演習問題の種類

- ▶ 復習問題: 講義で取り上げた内容を反復
- ▶ 補足問題: 講義で省略した内容を補足
- ▶ 追加問題: 講義の内容に追加
- ▶ 発展問題: 少し難しい (かもしれない)

演習問題 (続)

答案の提出

- ▶ 演習問題の答案をレポートとして提出してもよい
- ▶ レポートには提出締切がある (各回にて指定)
- ▶ レポートは採点されない (成績に勘案されない)
- ▶ レポートにはコメントがつけられて、返却される
 - ▶ 返却された内容については、再提出ができる (再提出締切は原則なし)
 - ▶ 再提出の際、返却された答案も添付しなくてはならない

評価

中間試験 と 期末試験 のみによる

▶ 出題形式

- ▶ 演習問題と同じ形式の問題を 4 題出題する
- ▶ その中の 2 題は演習問題として提示されたものと同一である (複数の演習問題が組み合わせられて 1 題とされる可能性もある) (「発展」として提示された演習問題は出題されない)
- ▶ 全問に解答する

▶ 配点：1 題 15 点満点，計 60 点満点

▶ 時間：90 分 (おそらく)

▶ 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

成績評価

▶ $\min\{100, \text{中間試験の素点} + \text{期末試験の素点}\}$ による

格言

格言 (三省堂 大辞林)

短い言葉で、人生の真理や処世術などを述べ、教えや戒めとした言葉。
「石の上にも三年」「沈黙は金」など。金言。

格言 (この講義における)

講義内容とは直接関係ないかもしれないが、
私 (岡本) が重要だと思うこと

格言 (の例)

単位取得への最短の道のりは、授業に出て、演習問題を解くこと

教科書・参考書

教科書

- ▶ 指定しない

全般的な参考書

- ▶ J. マトウシエク, J. ネシエトリル (著), 根上生也, 中本敦浩 (訳), 「離散数学への招待 (上・下)」, 丸善出版, 2002.
- ▶ 浅野孝夫, 「情報数学」, コロナ社, 2009.
- ▶ 小島定吉, 「離散構造」, 朝倉書店, 2013.
- ▶ 玉木久夫, 「情報科学のための確率入門」, サイエンス社, 2002.
- ▶ 伏見正則, 「確率と確率過程」, 朝倉書店, 2004.
- ▶ など

この講義の約束

- ▶ 私語はしない (ただし, 演習時間の相談は積極的に OK)
- ▶ 携帯電話等はマナーモードにする
- ▶ この講義と関係のないことを (主に電子機器で) しない
- ▶ 音を立てて睡眠しない

約束が守られない場合は退席してもらう場合あり

履修上の注意

離散確率論の基礎は前提知識

- ▶ 「講義資料」のページに復習資料あり

今日の目標

今日の目標

次の2つの数を扱えるようになる

- ▶ 階乗, 二項係数

扱えるとは？

- ▶ 漸近公式と簡単な上界, 下界
- ▶ 二項定理
- ▶ 組合せ的解釈

目次

- ① 階乗
- ② 二項係数
- ③ 二項定理
- ④ 今日のまとめ

階乗

定義：階乗とは？（直観的定義）

自然数 $n \geq 0$ の階乗とは，次で定義される自然数のこと

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 1$$

例：

- ▶ $0! = 1$
- ▶ $1! = 1$
- ▶ $2! = 2 \cdot 1 = 2$
- ▶ $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
- ▶ $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
- ▶ ...

階乗：再帰的定義

定義：階乗とは？（再帰的定義）

自然数 $n \geq 0$ の階乗とは、次で定義される自然数のこと

$$n! = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ n \cdot (n - 1)! & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

例：

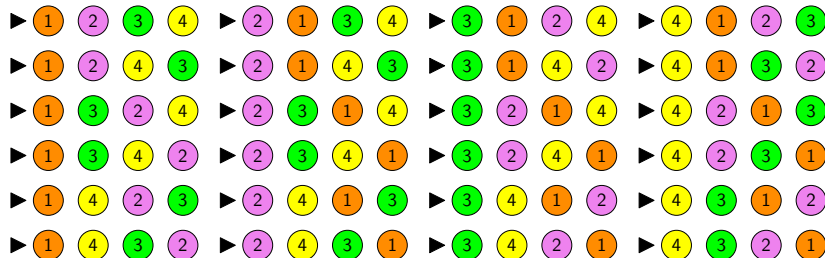
- ▶ $0! = 1$
- ▶ $1! = 1 \cdot 0! = 1 \cdot 1 = 1$
- ▶ $2! = 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1 = 2$
- ▶ $3! = 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 = 6$
- ▶ $4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 6 = 24$
- ▶ ...

組合せ的解釈

階乗の組合せ的解釈

$n!$ = 区別できる n 個のものを 1 列に並べる方法の総数

$n = 4$ のとき, $n! = 24$



格言

組合せの等式は, 組合せ的解釈で直感的に理解

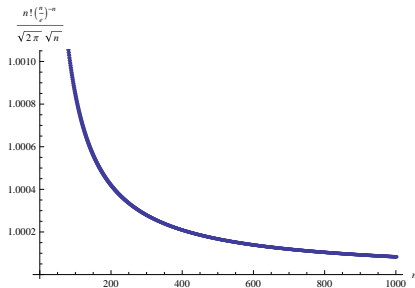
階乗：漸近公式

階乗の性質：スターリングの公式

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

特に,

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$



← $\frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}$ のプロット

証明は『複素関数論』の典型的な応用であるが、ここでは行わない

階乗：上界と下界 (かかい)

実用上、次のような「荒い評価」で十分なことも多い

階乗の性質：簡単な評価

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$e \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e n \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

つまり、

- ▶ $e n \left(\frac{n}{e}\right)^n$ は $n!$ の上界
- ▶ $e \left(\frac{n}{e}\right)^n$ は $n!$ の下界 (かかい)

格言

漸近公式は難しい。簡単な上界・下界を使いこなす。

階乗：上界と下界 — 上界の証明

実用上、次のような「荒い評価」で十分なことも多い

階乗の性質：簡単な評価

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$e \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e n \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

上界の証明： n に関する **帰納法**

(下界は演習問題)

[基底段階] $n = 1$ のとき

階乗：上界と下界 — 上界の証明

実用上、次のような「荒い評価」で十分なことも多い

階乗の性質：簡単な評価

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$e \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e n \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

上界の証明： n に関する帰納法

(下界は演習問題)

[基底段階] $n = 1$ のとき

▶ $n! = 1! = 1$

階乗：上界と下界 — 上界の証明

実用上、次のような「荒い評価」で十分なことも多い

階乗の性質：簡単な評価

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$e \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e n \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

上界の証明： n に関する **帰納法**

(下界は演習問題)

[基底段階] $n = 1$ のとき

▶ $n! = 1! = 1$

▶ $e n \left(\frac{n}{e}\right)^n = e \cdot 1 \left(\frac{1}{e}\right)^1 = 1$

階乗：上界と下界 — 上界の証明

実用上、次のような「荒い評価」で十分なことも多い

階乗の性質：簡単な評価

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$e \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e n \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

上界の証明： n に関する帰納法

(下界は演習問題)

[基底段階] $n = 1$ のとき

- ▶ $n! = 1! = 1$
- ▶ $e n \left(\frac{n}{e}\right)^n = e \cdot 1 \left(\frac{1}{e}\right)^1 = 1$
- ▶ したがって、 $n! \leq e n \left(\frac{n}{e}\right)^n$ となる

階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き)

階乗の性質：簡単な評価

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$e \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e n \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

上界の証明： n に関する帰納法[帰納段階] 任意の自然数 $k \geq 1$ を考える

▶ $k! \leq e k \left(\frac{k}{e}\right)^k$ となると仮定

階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き)

階乗の性質：簡単な評価

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$e \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e n \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

上界の証明： n に関する帰納法[帰納段階] 任意の自然数 $k \geq 1$ を考える

▶ $k! \leq e k \left(\frac{k}{e}\right)^k$ となると仮定

証明すること (目標)

$$(k+1)! \leq e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}$$

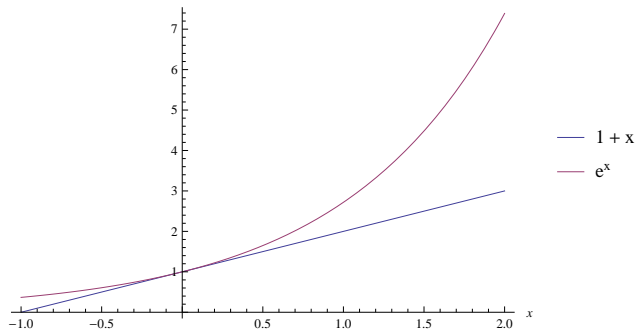
有用な不等式

事実：有用な不等式

(演習問題)

任意の実数 x に対して

$$1 + x \leq e^x$$



階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き 2)

$$(k + 1)! = (k + 1) \cdot k!$$

階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き 2)

$$\begin{aligned}(k+1)! &= (k+1) \cdot k! \\ &\leq (k+1) \cdot e k \left(\frac{k}{e}\right)^k \quad (\text{帰納法の仮定})\end{aligned}$$

階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き 2)

$$\begin{aligned}(k+1)! &= (k+1) \cdot k! \\ &\leq (k+1) \cdot e k \left(\frac{k}{e}\right)^k \quad (\text{帰納法の仮定}) \\ &= e \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1} \cdot e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}\end{aligned}$$

階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き 2)

$$\begin{aligned}(k+1)! &= (k+1) \cdot k! \\ &\leq (k+1) \cdot e k \left(\frac{k}{e}\right)^k \quad (\text{帰納法の仮定}) \\ &= e \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1} \cdot e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \\ &= e \left(\frac{(k+1)-1}{k+1}\right)^{k+1} \cdot e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}\end{aligned}$$

階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き 2)

$$\begin{aligned}(k+1)! &= (k+1) \cdot k! \\ &\leq (k+1) \cdot e k \left(\frac{k}{e}\right)^k \quad (\text{帰納法の仮定}) \\ &= e \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1} \cdot e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \\ &= e \left(\frac{(k+1)-1}{k+1}\right)^{k+1} \cdot e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \\ &= e \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} \cdot e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}\end{aligned}$$

階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き 2)

$$\begin{aligned}(k+1)! &= (k+1) \cdot k! \\ &\leq (k+1) \cdot e k \left(\frac{k}{e}\right)^k \quad (\text{帰納法の仮定}) \\ &= e \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1} \cdot e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \\ &= e \left(\frac{(k+1)-1}{k+1}\right)^{k+1} \cdot e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \\ &= e \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} \cdot e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \\ &\leq e \left(e^{-\frac{1}{k+1}}\right)^{k+1} \cdot e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}\end{aligned}$$

階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き 2)

$$\begin{aligned}
(k+1)! &= (k+1) \cdot k! \\
&\leq (k+1) \cdot e k \left(\frac{k}{e}\right)^k \quad (\text{帰納法の仮定}) \\
&= e \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1} \cdot e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \\
&= e \left(\frac{(k+1)-1}{k+1}\right)^{k+1} \cdot e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \\
&= e \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} \cdot e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \\
&\leq e \left(e^{-\frac{1}{k+1}}\right)^{k+1} \cdot e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \\
&= e \cdot (e^{-1}) \cdot e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}
\end{aligned}$$

階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き 2)

$$\begin{aligned}
(k+1)! &= (k+1) \cdot k! \\
&\leq (k+1) \cdot e k \left(\frac{k}{e}\right)^k \quad (\text{帰納法の仮定}) \\
&= e \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1} \cdot e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \\
&= e \left(\frac{(k+1)-1}{k+1}\right)^{k+1} \cdot e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \\
&= e \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} \cdot e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \\
&\leq e \left(e^{-\frac{1}{k+1}}\right)^{k+1} \cdot e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \\
&= e \cdot (e^{-1}) \cdot e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} = e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \quad \square
\end{aligned}$$

目次

① 階乗

② 二項係数

③ 二項定理

④ 今日のまとめ

二項係数

定義：二項係数とは？

自然数 a, b で $a \geq b$ を満たすものに対して,

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$$

- ▶ $\binom{a}{b}$ は「 a choose b 」と読む (のが普通)
- ▶ 「 ${}_aC_b$ 」という記号を高校では (なぜか) 使うが、国際的にはあまり用いられない (通じないか、通じにくい)

組合せ的解釈 (1) : 部分集合

二項係数の組合せ的解釈 (1)

$\binom{a}{b}$ = 要素数 a の集合における, 要素数 b の部分集合の総数

$a = 5, b = 2$ のとき : $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ の部分集合で要素数 2 のもの

$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\},$
 $\{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}$

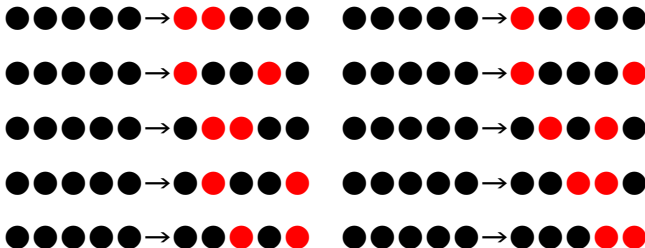
$$\binom{5}{2} = 10$$

組合せ的解釈 (2) : 着色

二項係数の組合せ的解釈 (2)

$\binom{a}{b}$ = 区別できる a 個のものの中から b 個に色を塗る方法の総数

$a = 5, b = 2$ のとき



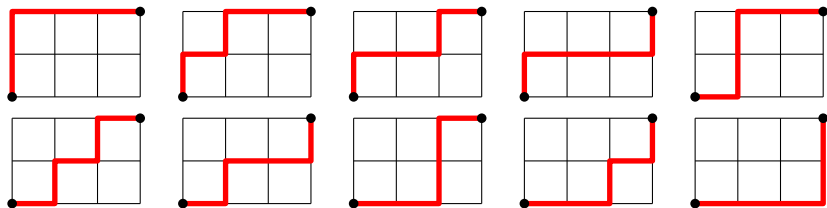
$$\binom{5}{2} = 10$$

組合せ的解釈 (3) : 格子道

二項係数の組合せ的解釈 (3)

$\binom{a}{b}$ = $(0,0)$ から $(a-b, b)$ に至る (単調な) 格子道の総数

$a = 5, b = 2$ のとき : $(0,0)$ から $(3,2)$ に至る格子道



$$\binom{5}{2} = 10$$

二項係数：上界と下界

二項係数の性質：簡単な評価

任意の自然数 $a \geq 1$ と任意の自然数 $b \geq 1$ に対して、 $a \geq b$ であるとき、

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b} \leq \left(\frac{ea}{b}\right)^b$$

上界の証明：演習問題

- ▶ ヒント：まず、 $\binom{a}{b} \leq \frac{a^b}{b!}$ を証明する
- ▶ ヒント：階乗に対する下界を使う

二項係数：上界と下界

二項係数の性質：簡単な評価

任意の自然数 $a \geq 1$ と任意の自然数 $b \geq 1$ に対して、 $a \geq b$ であるとき、

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b} \leq \left(\frac{ea}{b}\right)^b$$

下界の証明：

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$$

二項係数：上界と下界

二項係数の性質：簡単な評価

任意の自然数 $a \geq 1$ と任意の自然数 $b \geq 1$ に対して、 $a \geq b$ であるとき、

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b} \leq \left(\frac{ea}{b}\right)^b$$

下界の証明：

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a-1}{b-1} \cdots \frac{a-b+1}{1}$$

二項係数：上界と下界

二項係数の性質：簡単な評価

任意の自然数 $a \geq 1$ と任意の自然数 $b \geq 1$ に対して、 $a \geq b$ であるとき、

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b} \leq \left(\frac{ea}{b}\right)^b$$

下界の証明：

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a-1}{b-1} \cdots \frac{a-b+1}{1} \geq \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b}$$

注： $a \geq b \geq k$ のとき、 $(a-k)b \geq a(b-k)$ (演習問題)

二項係数：上界と下界

二項係数の性質：簡単な評価

任意の自然数 $a \geq 1$ と任意の自然数 $b \geq 1$ に対して、 $a \geq b$ であるとき、

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b} \leq \left(\frac{ea}{b}\right)^b$$

下界の証明：

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a-1}{b-1} \cdots \frac{a-b+1}{1} \geq \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^b \quad \square$$

注： $a \geq b \geq k$ のとき、 $(a-k)b \geq a(b-k)$ (演習問題)

二項係数に関する恒等式：対称性

性質：二項係数の対称性

任意の自然数 $a \geq b \geq 0$ に対して,

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$$

証明：式変形による

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$$

二項係数に関する恒等式：対称性

性質：二項係数の対称性

任意の自然数 $a \geq b \geq 0$ に対して,

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$$

証明：式変形による

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \frac{a!}{(a-b)!(a-(a-b))!}$$

二項係数に関する恒等式：対称性

性質：二項係数の対称性

任意の自然数 $a \geq b \geq 0$ に対して,

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$$

証明：式変形による

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \frac{a!}{(a-b)!(a-(a-b))!} = \binom{a}{a-b} \quad \square$$

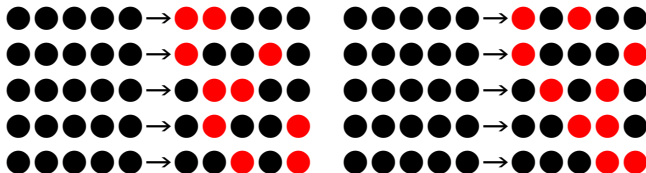
二項係数に関する恒等式：対称性 — 組合せ的解釈：着色

性質：二項係数の対称性

任意の自然数 $a \geq b \geq 0$ に対して、

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$$

- ▶ 左辺 = a 個のものの中から色を塗る b 個を選ぶ
- ▶ 右辺 = a 個のものの中から色を塗らない $a - b$ 個を選ぶ

 $a = 5, b = 2$ のとき

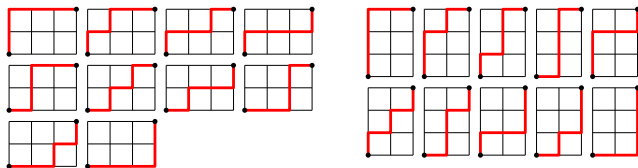
二項係数に関する恒等式：対称性 — 組合せ的解釈：格子道

性質：二項係数の対称性

任意の自然数 $a \geq b \geq 0$ に対して、

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$$

- ▶ 左辺 = $(0, 0)$ から $(a-b, b)$ へ至る格子道の総数
- ▶ 右辺 = $(0, 0)$ から $(b, a-b)$ へ至る格子道の総数

直線 $y = x$ に関してこの2つは対称なので、等式が成り立つ

二項係数に関する恒等式：パスカルの三角形

性質：パスカルの三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して、 $a - 1 \geq b$ ならば、

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

二項係数に関する恒等式：パスカルの三角形

性質：パスカルの三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して、 $a - 1 \geq b$ ならば、

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明：式変形による

$$\binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} = \frac{(a-1)!}{(b-1)!((a-1)-(b-1))!} + \frac{(a-1)!}{b!((a-1)-b)!}$$

二項係数に関する恒等式：パスカルの三角形

性質：パスカルの三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して、 $a - 1 \geq b$ ならば、

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明：式変形による

$$\begin{aligned} \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} &= \frac{(a-1)!}{(b-1)!((a-1)-(b-1))!} + \frac{(a-1)!}{b!((a-1)-b)!} \\ &= \frac{(a-1)!}{(b-1)!(a-b)!} + \frac{(a-1)!}{b!(a-b-1)!} \end{aligned}$$

二項係数に関する恒等式：パスカルの三角形

性質：パスカルの三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して、 $a - 1 \geq b$ ならば、

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明：式変形による

$$\begin{aligned} \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} &= \frac{(a-1)!}{(b-1)!((a-1)-(b-1))!} + \frac{(a-1)!}{b!((a-1)-b)!} \\ &= \frac{(a-1)!}{(b-1)!(a-b)!} + \frac{(a-1)!}{b!(a-b-1)!} \end{aligned}$$

二項係数に関する恒等式：パスカルの三角形

性質：パスカルの三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して、 $a - 1 \geq b$ ならば、

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明：式変形による

$$\begin{aligned} \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} &= \frac{(a-1)!}{(b-1)!((a-1)-(b-1))!} + \frac{(a-1)!}{b!((a-1)-b)!} \\ &= \frac{(a-1)!}{(b-1)!(a-b)!} + \frac{(a-1)!}{b!(a-b-1)!} \\ &= \frac{(a-1)!b}{b(b-1)!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)(a-b-1)!} \end{aligned}$$

二項係数に関する恒等式：パスカルの三角形

性質：パスカルの三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して、 $a - 1 \geq b$ ならば、

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明：式変形による

$$\begin{aligned} \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} &= \frac{(a-1)!}{(b-1)!((a-1)-(b-1))!} + \frac{(a-1)!}{b!((a-1)-b)!} \\ &= \frac{(a-1)!}{(b-1)!(a-b)!} + \frac{(a-1)!}{b!(a-b-1)!} \\ &= \frac{(a-1)!b}{b(b-1)!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)(a-b-1)!} \\ &= \frac{(a-1)!b}{b!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)!} \end{aligned}$$

二項係数に関する恒等式：パスカルの三角形 (証明の続き)

性質：パスカルの三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して、 $a - 1 \geq b$ ならば、

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明の続き：式変形による

$$\binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} = \dots = \frac{(a-1)!b}{b!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)!}$$



二項係数に関する恒等式：パスカルの三角形（証明の続き）

性質：パスカルの三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して、 $a - 1 \geq b$ ならば、

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明の続き：式変形による

$$\begin{aligned} \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} &= \dots = \frac{(a-1)!b}{b!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)!} \\ &= \frac{(a-1)!(b+(a-b))}{b!(a-b)!} \end{aligned}$$



二項係数に関する恒等式：パスカルの三角形（証明の続き）

性質：パスカルの三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して、 $a - 1 \geq b$ ならば、

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明の続き：式変形による

$$\begin{aligned} \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} &= \dots = \frac{(a-1)!b}{b!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)!} \\ &= \frac{(a-1)!(b+(a-b))}{b!(a-b)!} \\ &= \frac{(a-1)!a}{b!(a-b)!} \end{aligned}$$



二項係数に関する恒等式：パスカルの三角形（証明の続き）

性質：パスカルの三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して、 $a - 1 \geq b$ ならば、

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明の続き：式変形による

$$\begin{aligned} \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} &= \dots = \frac{(a-1)!b}{b!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)!} \\ &= \frac{(a-1)!(b+(a-b))}{b!(a-b)!} \\ &= \frac{(a-1)!a}{b!(a-b)!} = \frac{a!}{b!(a-b)!} \end{aligned}$$

□

二項係数に関する恒等式：パスカルの三角形（証明の続き）

性質：パスカルの三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して、 $a - 1 \geq b$ ならば、

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明の続き：式変形による

$$\begin{aligned} \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} &= \dots = \frac{(a-1)!b}{b!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)!} \\ &= \frac{(a-1)!(b+(a-b))}{b!(a-b)!} \\ &= \frac{(a-1)!a}{b!(a-b)!} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \binom{a}{b} \quad \square \end{aligned}$$

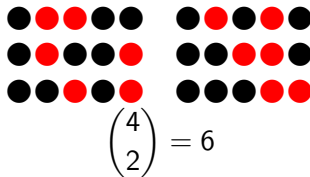
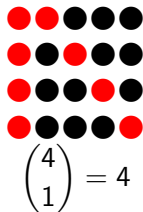
二項係数に関する恒等式：パスカルの三角形 — 組合せ的解釈：着色

性質：パスカルの三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して、 $a - 1 \geq b$ ならば、

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

- ▶ 最初のを塗る場合だけ見ると、 $\binom{a-1}{b-1}$ 通り
- ▶ 最初のを塗らない場合だけ見ると、 $\binom{a-1}{b}$ 通り



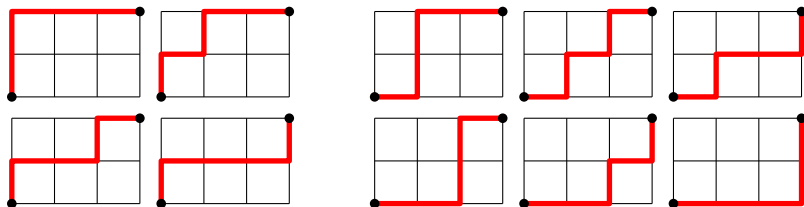
二項係数に関する恒等式：パスカルの三角形 — 組合せ的解釈：格子道

性質：パスカルの三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して、 $a - 1 \geq b$ ならば、

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

- ▶ 最初に上へ行く道だけ見ると、 $\binom{a-1}{b-1}$ 通り
- ▶ 最初に右へ行く道だけ見ると、 $\binom{a-1}{b}$ 通り



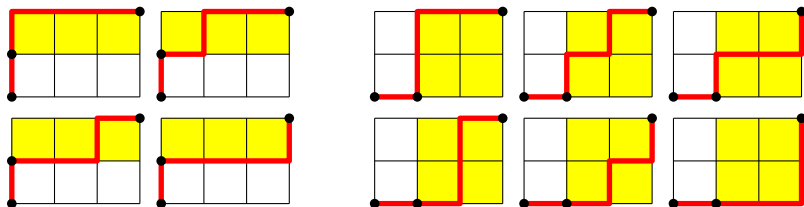
二項係数に関する恒等式：パスカルの三角形 — 組合せ的解釈：格子道

性質：パスカルの三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して、 $a - 1 \geq b$ ならば、

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

- ▶ 最初に上へ行く道だけ見ると、 $\binom{a-1}{b-1}$ 通り
- ▶ 最初に右へ行く道だけ見ると、 $\binom{a-1}{b}$ 通り



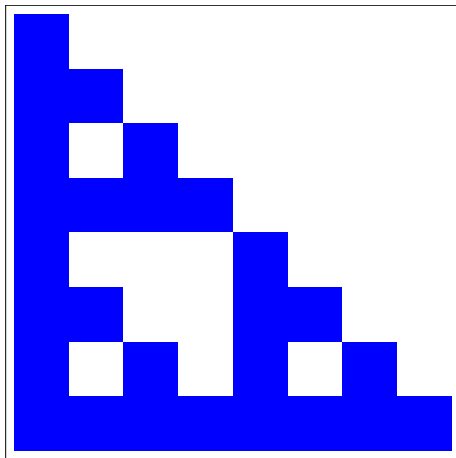
パスカルの三角形

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \binom{0}{0} \\
 & & & & & & & & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
 & & & & & & & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
 & & & & & & & & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
 & & & & & & & & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
 & & & & & & & & \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
 & & & & & & & & \binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} \\
 & & & & & & & & \binom{7}{0} & \binom{7}{1} & \binom{7}{2} & \binom{7}{3} & \binom{7}{4} & \binom{7}{5} & \binom{7}{6} & \binom{7}{7}
 \end{array}$$

パスカルの三角形

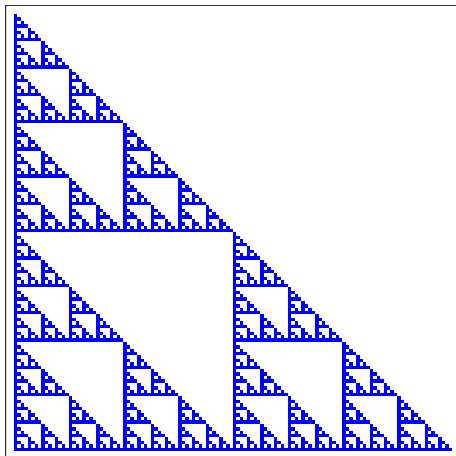
$$\begin{array}{cccccccc}
 \binom{0}{0} & & & & & & & \\
 \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & & \\
 \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & & \\
 \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & & \\
 \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & & \\
 \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & & \\
 \binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} & \\
 \binom{7}{0} & \binom{7}{1} & \binom{7}{2} & \binom{7}{3} & \binom{7}{4} & \binom{7}{5} & \binom{7}{6} & \binom{7}{7}
 \end{array}$$

パスカルの三角形



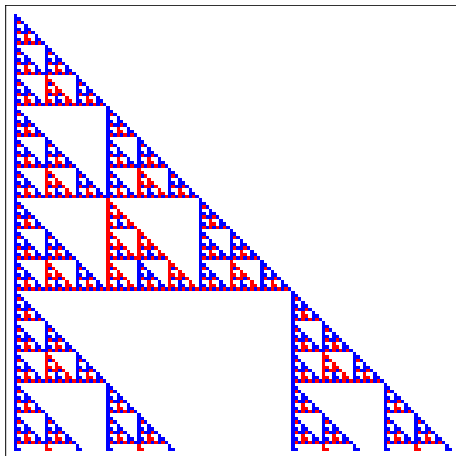
mod 2 による色付け

パスカルの三角形



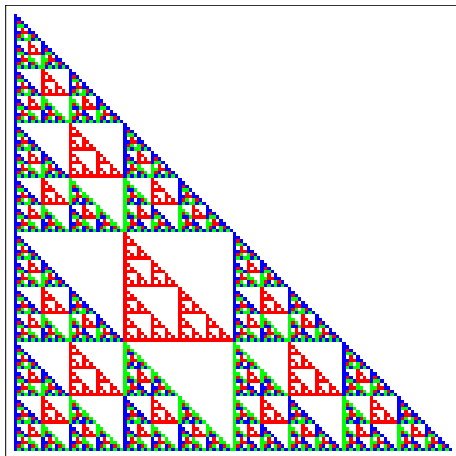
mod 2 による色付け

パスカルの三角形



mod 3 による色付け

パスカルの三角形



mod 4 による色付け

二項係数に関する恒等式：吸収恒等式

性質：吸収恒等式

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して,

$$\binom{a}{b} = \frac{a}{b} \binom{a-1}{b-1}$$

証明：式変形による

$$\frac{a}{b} \binom{a-1}{b-1}$$

二項係数に関する恒等式：吸収恒等式

性質：吸収恒等式

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して,

$$\binom{a}{b} = \frac{a}{b} \binom{a-1}{b-1}$$

証明：式変形による

$$\frac{a}{b} \binom{a-1}{b-1} = \frac{a}{b} \frac{(a-1)!}{(b-1)!((a-1)-(b-1))!}$$

二項係数に関する恒等式：吸収恒等式

性質：吸収恒等式

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して,

$$\binom{a}{b} = \frac{a}{b} \binom{a-1}{b-1}$$

証明：式変形による

$$\frac{a}{b} \binom{a-1}{b-1} = \frac{a}{b} \frac{(a-1)!}{(b-1)!((a-1)-(b-1))!} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$$

二項係数に関する恒等式：吸収恒等式

性質：吸収恒等式

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して,

$$\binom{a}{b} = \frac{a}{b} \binom{a-1}{b-1}$$

証明：式変形による

$$\frac{a}{b} \binom{a-1}{b-1} = \frac{a}{b} \frac{(a-1)!}{(b-1)!((a-1)-(b-1))!} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \binom{a}{b} \quad \square$$

二項係数に関する恒等式：吸収恒等式 — 組合せ的解釈：着色

性質：吸収恒等式

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して,

$$\binom{a}{b} = \frac{a}{b} \binom{a-1}{b-1}$$

a 個のものの中から $b-1$ 個に赤を塗り, 1 個に青を塗る

二項係数に関する恒等式：吸収恒等式 — 組合せ的解釈：着色

性質：吸収恒等式

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して,

$$\binom{a}{b} b = a \binom{a-1}{b-1}$$

a 個のものの中から $b-1$ 個に赤を塗り, 1 個に青を塗る

二項係数に関する恒等式：吸収恒等式 — 組合せ的解釈：着色

性質：吸収恒等式

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して,

$$\binom{a}{b} \binom{b}{1} = \binom{a}{1} \binom{a-1}{b-1}$$

a 個のものの中から $b-1$ 個に赤を塗り, 1 個に青を塗る

二項係数に関する恒等式：吸収恒等式 — 組合せ的解釈：着色

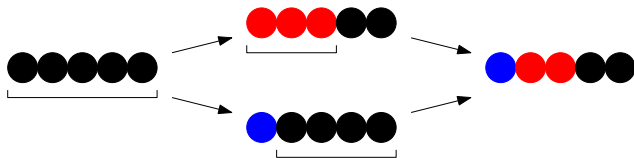
性質：吸収恒等式

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して,

$$\binom{a}{b} \binom{b}{1} = \binom{a}{1} \binom{a-1}{b-1}$$

a 個のものの中から $b-1$ 個に赤を塗り、1 個に青を塗る

- ▶ 左辺 = a 個のものの中から b 個に赤を塗り、その b 個の中から 1 個に青を塗る
- ▶ 右辺 = a 個のものの中から 1 個に青を塗り、残り $a-1$ 個の中から $b-1$ 個に赤を塗る



目次

① 階乗

② 二項係数

③ 二項定理

④ 今日のまとめ

二項定理

性質：二項定理

任意の複素数 x, y と任意の自然数 $n \geq 0$ に対して,

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

証明：演習問題

- ▶ ヒント： n に関する数学的帰納法 + パスカルの三角形

二項定理の応用 (1)

例題 1

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

証明 : 二項定理の式において, $x = y = 1$ とすると

$$2^n = (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \quad \square$$

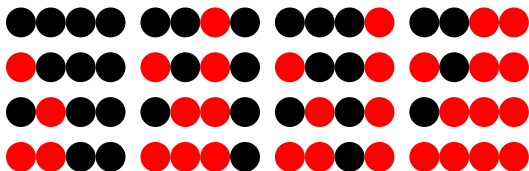
例題 1 : 組合せ的解釈 (着色)

例題 1

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

- ▶ 右辺 = n 個のものの中からいくつかに色を塗る方法の総数
- ▶ 左辺の第 k 項 = n 個のものの中から k 個に色を塗る方法の総数



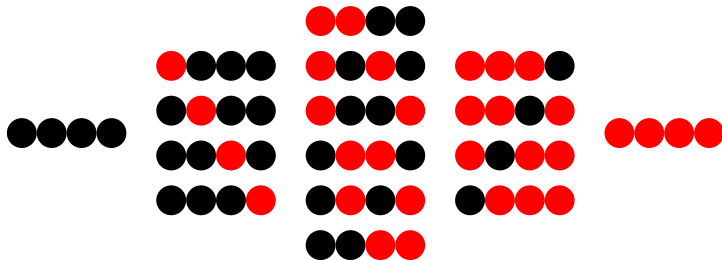
例題 1 : 組合せ的解釈 (着色)

例題 1

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

- ▶ 右辺 = n 個のものの中からいくつかに色を塗る方法の総数
- ▶ 左辺の第 k 項 = n 個のものの中から k 個に色を塗る方法の総数



二項定理の応用 (2)

例題 2

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

二項定理の応用 (2)

例題 2

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

証明 : 二項定理の式において, $x = -1, y = 1$ とすると

$$0 = (-1 + 1)^n$$

二項定理の応用 (2)

例題 2

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

証明 : 二項定理の式において, $x = -1, y = 1$ とすると

$$0 = (-1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k}$$

二項定理の応用 (2)

例題 2

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

証明 : 二項定理の式において, $x = -1, y = 1$ とすると

$$0 = (-1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \quad \square$$

二項定理の応用 (3)

例題 3

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

二項定理の応用 (3)

例題 3

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

証明 : 二項定理より

$$(x + 1)^{2n}$$

二項定理の応用 (3)

例題 3

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

証明 : 二項定理より

$$(x + 1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k 1^{2n-k}$$

二項定理の応用 (3)

例題 3

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

証明 : 二項定理より

$$(x+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k 1^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$$

二項定理の応用 (3)

例題 3

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

証明 : 二項定理より

$$(x+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k 1^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$$

特に, $(x+1)^{2n}$ における x^n の係数は $\binom{2n}{n}$

二項定理の応用 (3) : 証明の続き

一方,

$$(x + 1)^{2n} = (x + 1)^n(x + 1)^n$$

二項定理の応用 (3) : 証明の続き

一方,

$$(x+1)^{2n} = (x+1)^n(x+1)^n = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right) \left(\sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^\ell \right)$$

二項定理の応用 (3) : 証明の続き

一方,

$$\begin{aligned}(x+1)^{2n} &= (x+1)^n(x+1)^n = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right) \left(\sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^\ell \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{\ell} x^{k+\ell}\end{aligned}$$

二項定理の応用 (3) : 証明の続き

一方,

$$\begin{aligned}(x+1)^{2n} &= (x+1)^n(x+1)^n = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right) \left(\sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^\ell \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{\ell} x^{k+\ell}\end{aligned}$$

つまり, この式における x^n の係数は

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$$

二項定理の応用 (3) : 証明の続き

一方,

$$\begin{aligned}(x+1)^{2n} &= (x+1)^n(x+1)^n = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right) \left(\sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^\ell \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{\ell} x^{k+\ell}\end{aligned}$$

つまり, この式における x^n の係数は

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{k}$$

二項定理の応用 (3) : 証明の続き

一方,

$$\begin{aligned}(x+1)^{2n} &= (x+1)^n(x+1)^n = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right) \left(\sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^\ell \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{\ell} x^{k+\ell}\end{aligned}$$

つまり, この式における x^n の係数は

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

二項定理の応用 (3) : 証明の続き

一方,

$$\begin{aligned}(x+1)^{2n} &= (x+1)^n(x+1)^n = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k\right) \left(\sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^\ell\right) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{\ell} x^{k+\ell}\end{aligned}$$

つまり, この式における x^n の係数は

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

したがって,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

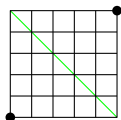
□

例題 3 : 組合せ的解釈 (格子道)

例題 3

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

右辺 = $(0,0)$ から (n,n) へ至る格子道の総数

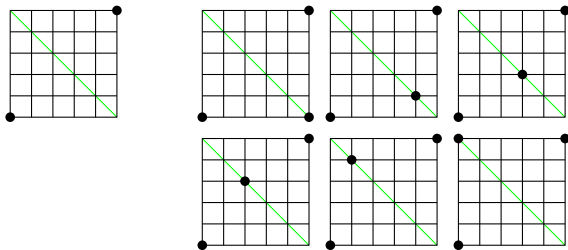
例題 3 : 組合せ的解釈 (格子道)

例題 3

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

左辺の第 k 項 = $(0,0)$ から (n,n) へ至る格子道の中で、
 $(k, n-k)$ を通るものの総数



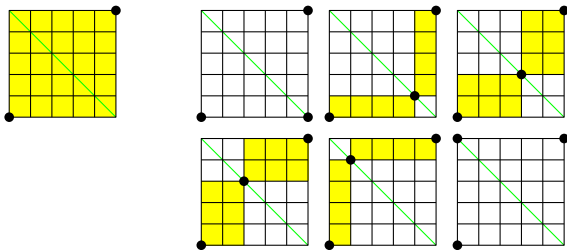
例題 3 : 組合せ的解釈 (格子道)

例題 3

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

左辺の第 k 項 = $(0,0)$ から (n,n) へ至る格子道の中で、
 $(k, n-k)$ を通るものの総数



目次

- ① 階乗
- ② 二項係数
- ③ 二項定理
- ④ 今日のまとめ

この講義の概要

主題

次の3つを道具として

離散システム／アルゴリズムの設計と解析に関する方法論を学習する

- ▶ 数え上げ組合せ論
- ▶ 代数系
- ▶ 離散確率論

キャッチフレーズ：「離散数学を使う」

達成目標：以下の3項目をすべて達成することを目標とする

- 1 数え上げ組合せ論，代数系，離散確率論における用語を正しく使うことができる
- 2 数え上げ組合せ論，代数系，離散確率論における典型的な論法を用いて，証明を行うことができる
- 3 数え上げ組合せ論，代数系，離散確率論を用いて，離散システム／アルゴリズムの設計と解析ができる

今日の目標

今日の目標

次の2つの数を扱えるようになる

- ▶ 階乗, 二項係数

扱えるとは?

- ▶ 漸近公式と簡単な上界, 下界
- ▶ 二項定理
- ▶ 組合せ的解釈

格言

組合せの等式は, 組合せ的解釈で直感的に理解

格言

漸近公式は難しい. 簡単な上界・下界を使いこなす.

残った時間の使い方

- ▶ 演習問題をやる
 - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
 - ▶ 教員と TA は巡回
- ▶ 退室時, 小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
 - ▶ 内容は何でも OK
 - ▶ 匿名で OK

目次

- ① 階乗
- ② 二項係数
- ③ 二項定理
- ④ 今日のまとめ