## 離散数理工学 第 9 回
## 離散確率論：確率的離散システムの解析 (基礎)

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2019 年 12 月 3 日

最終更新：2019 年 12 月 3 日　13:11



### スケジュール 前半





### スケジュール 後半 (予定)



注意：予定の変更もありうる





### 目次







### 不公平な硬貨投げ：設定

**不公平な硬貨投げ**

次のような硬貨 (コイン) を 1 つ投げる
- 表の出る確率 $= p$
- 裏の出る確率 $= 1 - p$

ただし，$0 < p \leq 1$

典型的な問題：この硬貨を続けて何回か独立に投げる
1. $n$ 回投げて，表が $n$ 回出る確率は？
2. $n$ 回投げて，表が一度も出ない確率は？
3. $n$ 回投げて，表が一度は出る確率は？
4. $n$ 回投げて，表が出る回数の期待値は？
5. 表が出るまで投げ続けるとき，投げる回数の期待値は？





### 不公平な硬貨投げ：表が出続ける確率は？

**問題**

1. $n$ 回投げて，表が $n$ 回出る確率は？

- $E_i$ = $i$ 回目に表が出る (事象)
- このとき，$E_1, \ldots, E_n$ は互いに独立なので

$$\begin{aligned}\mathrm{Pr}(\text{表が } n \text{ 回出る}) &= \mathrm{Pr}(E_1 \text{ かつ } E_2 \text{ かつ } \cdots \text{ かつ } E_n)\\ &= \mathrm{Pr}(E_1)\cdot\mathrm{Pr}(E_2)\cdot\cdots\cdot\mathrm{Pr}(E_n)\\ &= p\cdot p\cdot\cdots\cdot p\\ &= p^n\end{aligned}$$





### 不公平な硬貨投げ：表が一度も出ない確率は？

**問題**

2. $n$ 回投げて，表が一度も出ない確率は？

- $\overline{E_i}$ = $i$ 回目に裏が出る (事象)
- このとき，$\overline{E_1}, \ldots, \overline{E_n}$ は互いに独立なので

$$\begin{aligned}\mathrm{Pr}(n \text{ 回中，表が一度も出ない}) &= \mathrm{Pr}(\overline{E_1} \text{ かつ } \cdots \text{ かつ } \overline{E_n})\\ &= \mathrm{Pr}(\overline{E_1})\cdot\cdots\cdot\mathrm{Pr}(\overline{E_n})\\ &= (1-p)\cdot\cdots\cdot(1-p)\\ &= (1-p)^n\end{aligned}$$





### 不公平な硬貨投げ：表が一度は出る確率は？

**問題**

3. $n$ 回投げて，表が一度は出る確率は？

- 「表が一度は出る」という事象は
  「表が一度も出ない」という事象の余事象
- したがって，

$$\begin{aligned}\mathrm{Pr}(n \text{ 回中，表が一度は出る}) &= 1 - \mathrm{Pr}(n \text{ 回中，表が一度も出ない})\\ &= 1 - (1-p)^n\end{aligned}$$

## 不公平な硬貨投げ：表が出る回数の期待値は？

**問題**

4 $n$ 回投げて，表が出る回数の期待値は？

- 次の確率変数を考える (事象 $E_i$ の標示確率変数と呼ばれる)

$$X_i = \begin{cases} 1 & (E_i \text{ が生起する，つまり，} i \text{ 回目に表が出る}) \\ 0 & (E_i \text{ が生起しない，つまり，} i \text{ 回目に裏が出る}) \end{cases}$$

- このとき，$\mathrm{E}[X_i] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$
- 確率変数 $X$ で，$n$ 回の中で表が出る回数を表すとすると，

$$X = X_1 + \cdots + X_n$$

- したがって，

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[n \text{ 回中，表が出る回数}] &= \mathrm{E}[X] \\ &= \mathrm{E}[X_1 + \cdots + X_n] \\ &= \mathrm{E}[X_1] + \cdots + \mathrm{E}[X_n] \leftarrow \text{期待値の線形性} \\ &= pn \end{aligned}$$





## (補足) 不公平な硬貨投げ：表が出る回数の期待値は？

⇝ 標示確率変数を使わなかったら…

- $F_j = n$ 回の中で $j$ 回表が出る (事象)
- このとき，$\Pr(F_j) = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$
- したがって，

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[n \text{ 回中，表が出る回数}] &= \sum_{j=0}^{n} j \cdot \Pr(F_j) = \sum_{j=0}^{n} j \cdot \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \\ &= np(p + (1-p))^{n-1} = pn \end{aligned}$$

**ここで** **(演習問題)**

$$nx(x+y)^{n-1} = \sum_{j=0}^{n} j \binom{n}{j} x^j y^{n-j}$$





## 不公平な硬貨投げ：表が出るまで投げるとき，投げる回数の期待値は？

**問題**

5 表が出るまで投げるとき，投げる回数の期待値は？

- 「表が出るまで投げるとき，投げる回数」を $Y$ とする (確率変数)
- 1 回目に表が出る事象は $E_1$ と書いたので，

$$\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[Y \mid E_1] \Pr(E_1) + \mathrm{E}[Y \mid \overline{E_1}] \Pr(\overline{E_1})$$

- ここで，$\Pr(E_1) = p$，$\Pr(\overline{E_1}) = 1 - \Pr(E_1) = 1 - p$
- また，$\mathrm{E}[Y \mid E_1] = 1$ であり，$\mathrm{E}[Y \mid \overline{E_1}] = \mathrm{E}[1 + Y] = 1 + \mathrm{E}[Y]$
- したがって，

$$\mathrm{E}[Y] = 1 \cdot p + (1 + \mathrm{E}[Y]) \cdot (1-p) = (1-p)\mathrm{E}[Y] + 1$$

- $\therefore \mathrm{E}[Y] = \dfrac{1}{p}$





## (補足) 不公平な硬貨投げ：表が出るまで投げるとき，投げる回数の期待値は？

⇝ 条件つき期待値を使わなかったら…

- $A_i = 1$ 回目から $i-1$ 回目まですべて裏で，$i$ 回目で表が出る (事象)
- このとき，

$$\begin{aligned} \Pr(A_i) &= \Pr(\overline{E_1} \text{ かつ } \cdots \text{ かつ } \overline{E_{i-1}} \text{ かつ } E_i) \\ &= \Pr(\overline{E_1}) \cdot \cdots \cdot \Pr(\overline{E_{i-1}}) \cdot \Pr(E_i) \qquad (\text{独立性}) \\ &= (1-p)^{i-1} p \end{aligned}$$

- したがって，

$$\begin{aligned} \text{求める期待値} &= \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \Pr(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot (1-p)^{i-1} p \\ &= \frac{1}{p} \qquad (\text{詳細は演習問題}) \end{aligned}$$





## 不公平な硬貨投げ：表が出る回数が期待値から離れる確率は？

- 次の確率変数を考える (事象 $E_i$ の標示確率変数と呼ばれる)

$$X_i = \begin{cases} 1 & (E_i \text{ が生起する，つまり，} i \text{ 回目に表が出る}) \\ 0 & (E_i \text{ が生起しない，つまり，} i \text{ 回目に裏が出る}) \end{cases}$$

- 確率変数 $X$ で，$n$ 回の中で表が出る回数を表すとすると，

$$X = X_1 + \cdots + X_n$$

- したがって，

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X] &= \mathrm{E}[X_1 + \cdots + X_n] \\ &= \mathrm{E}[X_1] + \cdots + \mathrm{E}[X_n] = pn \end{aligned}$$

**次の確率はどれくらい小さいか？ (または大きいか？)**

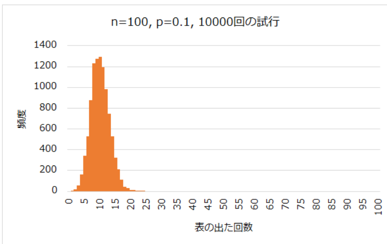
$$\Pr(X \geq 2\mathrm{E}[X])$$





## 不公平な硬貨投げ：表が出る回数が期待値から離れる確率は？

シミュレーションをしてみた




$n = 100$，$p = 0.1$，10000 回の試行を行ったところ

- $\Pr(X \geq 2\mathrm{E}[X]) = \dfrac{30}{10000} = 0.003$ (とても小さい)

これを数学的に解析したい





## 不公平な硬貨投げ：マルコフの不等式

マルコフの不等式より

$$\Pr(X \geq 2\mathrm{E}[X]) \leq \frac{\mathrm{E}[X]}{2\mathrm{E}[X]} = \frac{1}{2}$$

「とても小さい」ということが証明できない

**マルコフの不等式** **(復習)**

自然数値確率変数 $Z \geq 0$ と正実数 $t > 0$ に対して，$\mathrm{E}[Z]$ が存在するとき

$$\Pr(Z \geq t) \leq \frac{\mathrm{E}[Z]}{t}$$





## 不公平な硬貨投げ：チェルノフ上界の技法

マルコフの不等式より

$$\begin{aligned} \Pr(X \geq 2\mathrm{E}[X]) &= \Pr(2^X \geq 2^{2\mathrm{E}[X]}) \\ &\leq \frac{\mathrm{E}[2^X]}{2^{2\mathrm{E}[X]}} \end{aligned}$$

よって，$\mathrm{E}[2^X]$ を知りたい

## 不公平な硬貨投げ：チェルノフ上界の技法 (2)

$X_1, \dots, X_n$ は互いに独立なので，$2^{X_1}, \dots, 2^{X_n}$ も互いに独立であり，

$$\mathrm{E}\left[2^X\right] = \mathrm{E}\left[2^{X_1+\cdots+X_n}\right] = \mathrm{E}\left[\prod_{i=1}^{n} 2^{X_i}\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left[2^{X_i}\right] \quad \text{←独立性を利用}$$

ここで，任意の $i$ に対して

$$\mathrm{E}\left[2^{X_i}\right] = 2^1 \cdot p + 2^0 \cdot (1-p) = 2p + (1-p) = 1 + p$$

ゆえに，

$$\mathrm{E}\left[2^X\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left[2^{X_i}\right] = (1+p)^n$$





## 不公平な硬貨投げ：チェルノフ上界の技法 (3)

まとめると，

$$\Pr(X \geq 2\mathrm{E}[X]) \leq \frac{\mathrm{E}\left[2^X\right]}{2^{2\mathrm{E}[X]}} = \frac{(1+p)^n}{2^{2pn}} = \left(\frac{1+p}{4^p}\right)^n$$

- 右辺は $n$ が大きくなるにつれて小さくなる
- $p = 1/10$，$n = 100$ のとき，右辺 $\approx 0.0132$





## 不公平な硬貨投げ：チェルノフ上界の技法 (4)

**疑問**

- 疑問：$X_i$ から $2^{X_i}$ を作ったが,「2」でないといけないのか？
- 回答：「2」でなくてもよい．1 より大きければよい

例えば，2 ではなく，3 にすると，

$$\Pr(X \geq 2\mathrm{E}[X]) \leq \frac{\mathrm{E}\left[3^X\right]}{3^{2\mathrm{E}[X]}} = \frac{(1+2p)^n}{3^{2pn}} = \left(\frac{1+2p}{9^p}\right)^n$$

$p = 1/10$，$n = 100$ のとき，この右辺は $\approx 0.0238$

**チェルノフ上界の技法：$X$ が独立確率変数の和であるとき**

- $\mathrm{E}[X]$ の代わりに $\mathrm{E}[c^X]$ を考えて，マルコフの不等式 (など) を適用
- 上界ができる限り小さくなるように，定数 $c$ を定める





## 目次







## クーポン収集問題

**クーポン収集問題**

設定

- 商品を買うと $n$ 種類の景品 (クーポン) の中の 1 つが当たる
- 景品の集合 $N = \{1, \dots, n\}$
- どの景品 $i$ に対しても，$\Pr(\text{景品 } i \text{ が当たる}) = \dfrac{1}{n}$ で，
  これらは商品の間で同一であり，互いに独立

問題

- 全種類の景品を集め切るまで，何個商品を購入すればよいか？

注意：購入商品数は確率変数なので，答えたいものは

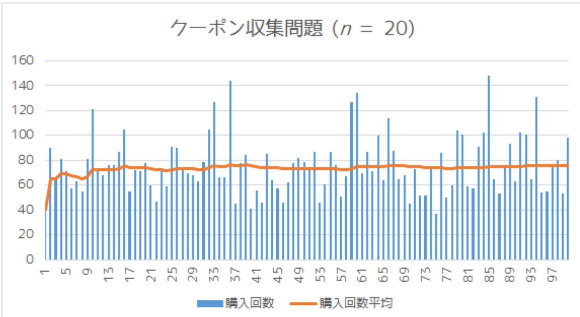
- 購入商品数の期待値
- 高確率で購入する商品数 (の上界)





## クーポン収集問題：シミュレーション

景品数 20 の場合




10000 回の試行：購入商品数平均 $= 72.0825$





## クーポン収集問題：期待値

考え方：商品を次々と買うとき，既にいくつ景品を持っているか考慮する

- $\Pr(\text{新しい景品が当たる} \mid \text{既に景品を } j \text{ 個所持}) = \dfrac{n-j}{n}$

ここで，次の確率変数を考える

$$X_j = \begin{array}{l}\text{景品を } j \text{ 種類所持した瞬間から，} \\ \text{新しい景品が当たるまでに購入した商品の数}\end{array}$$

- 景品を $j$ 種類所持しているとき，新しい景品が当たること は
  表が出る確率が $\dfrac{n-j}{n}$ である硬貨を投げて表が出ること とみなせる
- したがって，$\mathrm{E}[X_j] = \dfrac{n}{n-j}$





## クーポン収集問題：期待値 (続き)

- 購入商品数 $= X_0 + X_1 + \cdots + X_{n-1}$ なので，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\text{購入商品数}] &= \mathrm{E}[X_0 + X_1 + \cdots + X_{n-1}] \\ &= \mathrm{E}[X_0] + \mathrm{E}[X_1] + \cdots + \mathrm{E}[X_{n-1}] \\ &= \frac{n}{n} + \frac{n}{n-1} + \cdots + \frac{n}{1} \\ &= n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\end{aligned}$$

**調和数とは？**

第 $n$ 調和数とは，次で定義される数 $H_n$ のこと

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

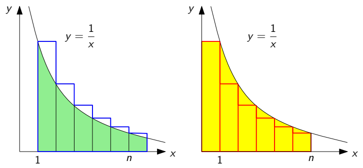
## 調和数の性質

**調和数の上界と下界**

任意の整数 $n \geq 1$ に対して

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$$

証明：演習問題 (ヒントは次の図)




**帰結**

$$H_n = \ln n + O(1)$$





## クーポン収集問題：期待値から確率へ

- すなわち，
$$\mathrm{E}[\text{購入商品数}] = nH_n = n \ln n + O(n)$$
- マルコフの不等式より
$$\Pr(\text{購入商品数} \geq 2nH_n) \leq \frac{\mathrm{E}[\text{購入商品数}]}{2nH_n} = \frac{1}{2}$$

購入商品数が大きくなる確率に対して，もっと「きつい」上界が欲しい





## クーポン収集問題：期待値から確率へ — 合併上界の利用 (1)

- $E_i = 2nH_n$ 回の商品購入で景品 $i$ が得られない (事象)
- このとき，任意の $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対して，

$$\begin{aligned}\Pr(E_i) &= \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2nH_n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2nH_n} \\ &\leq \left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}\right)^{2nH_n} = \mathrm{e}^{-2H_n} \\ &\leq \mathrm{e}^{-2\ln(n+1)} = \frac{1}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

**事実：有用な不等式　(第 1 回講義より)**

任意の実数 $x$ に対して

$$1 + x \leq \mathrm{e}^x$$





## クーポン収集問題：期待値から確率へ — 合併上界の利用 (2)

- したがって，

$$\begin{aligned}\Pr(\text{購入商品数} > 2nH_n) &= \Pr(E_1 \text{ または } E_2 \text{ または } \cdots \text{ または } E_n) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \Pr(E_i) \\ &\leq n \cdot \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

つまり，$\lim_{n\to\infty} \Pr(\text{購入商品数} > 2nH_n) = 0$

**合併上界**

事象 $A, B$ に対して

$$\Pr(A \cup B) \leq \Pr(A) + \Pr(B)$$





## クーポン収集問題：期待値から確率へ (続)

次が知られている (証明は省略：ポアソン近似とチェルノフ技法を使う)

**エルデシュとレニィによる 1961 年の結果**

任意の正実数 $c > 0$ に対して，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \Pr(\text{購入商品数} > n \ln n + cn) &= 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-c}}, \\ \lim_{n\to\infty} \Pr(\text{購入商品数} < n \ln n + cn) &= 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{c}}\end{aligned}$$

つまり購入商品数 (確率変数) は，その期待値の周りに集中している





## クーポン収集問題：まとめ

**クーポン収集問題**

設定

- 商品を買うと $n$ 種類の景品 (クーポン) の中の 1 つが当たる
- 景品の集合 $N = \{1, \ldots, n\}$
- どの景品 $i$ に対しても，$\Pr(\text{景品 } i \text{ が当たる}) = \frac{1}{n}$ で，これらは商品の間で同一であり，互いに独立

問題

- すべての景品を集め切るまで，何個商品を購入すればよいか？

回答

- 購入商品数の期待値は $nH_n$ であり，
- $n \to \infty$ のとき，購入商品数は高い確率で $nH_n$ になる





## 目次







## 誕生日のパラドックス：例

**誕生日問題**

10 人いる部屋の中に，誕生日が同じ 2 人はいるか？
そのような 2 人がいる確率は？

仮定

- 1 年は 366 日
- 人の誕生日がそれら 366 日の間に等確率で分布する

$$\Pr(i \text{ さんの誕生日が } j) = \frac{1}{366}$$

## 誕生日のパラドックス：計算

まず，10 人の誕生日がすべて異なる確率を計算する

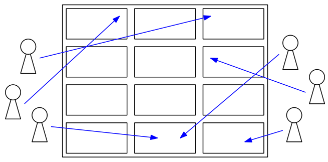
- 10 人の誕生日がすべて異なる確率 $= \dfrac{366 \cdot 365 \cdot \cdots \cdot 357}{366^{10}} \approx 0.883$

したがって

- 10 人の中に誕生日の同じ人がいる確率 $\approx 1 - 0.883 = 0.117$

つまり，

- 11 % ぐらいの確率で同じ誕生日の 2 人がいる







## 誕生日のパラドックス：計算 — 30 人の場合

まず，30 人の誕生日がすべて異なる確率を計算する

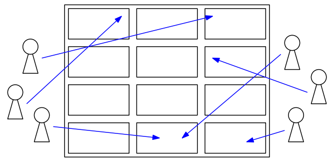
- 30 人の誕生日がすべて異なる確率 $= \dfrac{366 \cdot 365 \cdot \cdots \cdot 337}{366^{30}} \approx 0.295$

したがって

- 30 人の中に誕生日の同じ人がいる確率 $\approx 1 - 0.295 = 0.705$

つまり，

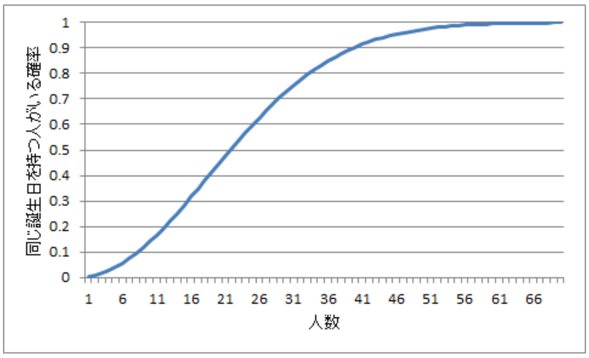
- 70 % ぐらいの確率で同じ誕生日の 2 人がいる







## 誕生日のパラドックス：計算してみた








## 誕生日のパラドックス：一般化

設定

- $k = 1$ 年の日数
- $m =$ 部屋の人数
- $\Pr(i$ さんの誕生日が $j) = \dfrac{1}{k}$

問題

1. 部屋の中に同じ誕生日の 2 人がいる確率は？
2. 同じ誕生日の 2 人がいる確率が $\frac{1}{2}$ を超えるのはいつ？





## 誕生日のパラドックス：一般化

まず，$m$ 人の誕生日がすべて異なる確率を計算する

- $m$ 人の誕生日がすべて異なる確率 $= \dfrac{k \cdot (k-1) \cdot \cdots \cdot (k-m+1)}{k^m}$
- ここで，

$$\begin{aligned} \frac{k \cdot (k-1) \cdot \cdots \cdot (k-m+1)}{k^m} &= \prod_{i=0}^{m-1} \frac{k-i}{k} = \prod_{i=0}^{m-1} \left(1 - \frac{i}{k}\right) \\ &\leq \prod_{i=0}^{m-1} \mathrm{e}^{-\frac{i}{k}} = \mathrm{e}^{\sum_{i=0}^{m-1} -\frac{i}{k}} = \mathrm{e}^{-\frac{m(m-1)}{2k}} \end{aligned}$$

**事実：有用な不等式 (第 1 回講義の復習)**

任意の実数 $x$ に対して

$$1 + x \leq \mathrm{e}^x$$





## 誕生日のパラドックス：一般化 (2)

したがって，

- $m$ 人の中に誕生日が同じ 2 人がいる確率 $\geq 1 - \mathrm{e}^{-\frac{m(m-1)}{2k}}$
- $m \geq \sqrt{(2\ln 2)k} + 1$ のとき，この右辺が $\frac{1}{2}$ 以上になる

$$\begin{aligned} \text{なぜならば，} \quad m &\geq \sqrt{(2\ln 2)k} + 1 \quad \text{であるとき，} \\ (m-1)^2 &\geq (2\ln 2)k \\ \therefore \quad m(m-1) &\geq (2\ln 2)k \\ \therefore \quad -\ln 2 &\geq -\frac{m(m-1)}{2k} \\ \therefore \quad \frac{1}{2} &\geq \mathrm{e}^{-\frac{m(m-1)}{2k}} \\ \therefore \quad 1 - \mathrm{e}^{-\frac{m(m-1)}{2k}} &\geq \frac{1}{2} \quad \text{となるから} \end{aligned}$$



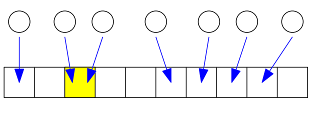


## 誕生日のパラドックス：ハッシュ値の衝突との関係

**ハッシュ (アルゴリズム論第一の復習)**

ハッシュ関数は $N = \{1, \ldots, n\}$ から $K = \{1, \ldots, k\}$ への関数 $h$
(典型的には $k < n$)

- 性質：$h$ が「よくかき混ぜる」関数であるとき
  $h(x) = h(y)$ であるならば，$x = y$ である可能性が高い
- $x \neq y$ であるのに $h(x) = h(y)$ であるとき，
  $x$ と $y$ のハッシュ値が衝突 (好ましくない)







## 誕生日のパラドックス：ハッシュ値の衝突との関係 (続)

**ハッシュ (アルゴリズム論第一の復習)**

ハッシュ関数は $N = \{1, \ldots, n\}$ から $K = \{1, \ldots, k\}$ への関数 $h$
(典型的には $k < n$)

- 性質：$h$ が「よくかき混ぜる」関数であるとき
  $h(x) = h(y)$ であるならば，$x = y$ である可能性が高い
- $x \neq y$ であるのに $h(x) = h(y)$ であるとき，
  $x$ と $y$ のハッシュ値が衝突 (好ましくない)

次の 2 つは同じであると見なせる

- 要素数 $m$ の部分集合 $S \subseteq N$ にハッシュ値の衝突する 2 要素が
  あるか？
- 1 年が $k$ 日の場合，$m$ 人の部屋の中に誕生日の同じ 2 人がいるか？

$\therefore m \geq \sqrt{(2\ln 2)k} + 1$ のとき，そのような 2 要素の存在確率は $\frac{1}{2}$ 以上

## 目次







## 今日の目標

**今日の目標**

典型的な確率的離散システムの解析ができるようになる

- 不公平な硬貨投げ
- クーポン収集問題
- 誕生日のパラドックス





## 残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員と TA は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK