離散数理工学　第 8 回
離散代数：有限群の構造 (続き)

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2019 年 11 月 26 日

最終更新：2019 年 11 月 26 日　09:00

スケジュール 前半

1. 数え上げの基礎：二項係数と二項定理 (10/1)
2. 数え上げの基礎：漸化式の立て方 (10/8)
3. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎) (10/15)
- ⋆ 休み (祝日) (10/22)
4. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展) (10/29)
5. 離散代数：図形とグラフの対称性 (11/5)
6. 離散代数：有限群 (11/12)
7. 離散代数：有限群の構造 (11/19)
8. 離散代数：有限群の構造 (続き) (11/26)

スケジュール 後半 (予定)

9. 離散確率論：確率的離散システムの解析 (基礎) (12/3)
- ⋆ 中間試験 (12/10)
10. 離散確率論：確率的離散システムの解析 (発展) (12/17)
11. 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎) (1/7)
12. 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展) (1/14)
13. 離散確率論：マルコフ連鎖 (基礎) (1/21)
14. 離散確率論：マルコフ連鎖 (発展) (1/28)
- ⋆ 授業等調整日 (2/4)
- ⋆ 期末試験 (2/18?)

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

今日の目標

前回までの話を完了する

目次

1. 前回の続き

復習：同型性と位数

要素の位数を見ることで，次が分かった

- 正六角形の回転・鏡映対称性を表す群 は
  正四面体の回転対称性を表す群 と同型ではない
- $K_{2,3}$ の自己同型性を表す群 は
  正四面体の回転対称性を表す群 と同型ではない

注意：正六角形の回転・鏡映対称性を表す群 と
$K_{2,3}$ の自己同型性を表す群 が同型かどうか まだ分からない

今から行うこと

正六角形の回転・鏡映対称性を表す群と
$K_{2,3}$ の自己同型性を表す群が同型であることを示す

$\rightsquigarrow$ 同型写像を構成する (どうやって？)

正六角形の回転・鏡映対称性を表す群

$\langle r, s \mid r^6 = 1, s^2 = 1, rsrs = 1 \rangle$

	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	rs	r^2s	r^3s	r^4s	r^5s
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	rs	r^2s	r^3s	r^4s	r^5s
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1	rs	r^2s	r^3s	r^4s	r^5s	s
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2s	r^3s	r^4s	r^5s	s	rs
r^3	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3s	r^4s	r^5s	s	rs	r^2s
r^4	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4s	r^5s	s	rs	r^2s	r^3s
r^5	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5s	s	rs	r^2s	r^3s	r^4s
s	s	r^5s	r^4s	r^3s	r^2s	rs	1	r^5	r^4	r^3	r^2	r
rs	rs	s	r^5s	r^4s	r^3s	r^2s	r	1	r^5	r^4	r^3	r^2
r^2s	r^2s	rs	s	r^5s	r^4s	r^3s	r^2	r	1	r^5	r^4	r^3
r^3s	r^3s	r^2s	rs	s	r^5s	r^4s	r^3	r^2	r	1	r^5	r^4
r^4s	r^4s	r^3s	r^2s	rs	s	r^5s	r^4	r^3	r^2	r	1	r^5
r^5s	r^5s	r^4s	r^3s	r^2s	rs	s	r^5	r^4	r^3	r^2	r	1

$K_{2,3}$ の自己同型群 (1)

	12345	12354	12435	12453	12534	12543
12345	12345	12354	12435	12453	12534	12543
12354	12354	12345	12453	12435	12543	12534
12435	12435	12534	12345	12543	12354	12453
12453	12453	12543	12354	12534	12345	12435
12534	12534	12435	12543	12345	12453	12354
12543	12543	12453	12534	12354	12435	12345
21345	21345	21354	21435	21453	21534	21543
21354	21354	21345	21453	21435	21543	21534
21435	21435	21534	21345	21543	21354	21453
21453	21453	21543	21354	21534	21345	21435
21534	21534	21435	21543	21345	21453	21354
21543	21543	21453	21534	21354	21435	21345

(次ページに続く)

$K_{2,3}$ の自己同型群 (2)

	21345	21354	21435	21453	21534	21543
12345	21345	21354	21435	21453	21534	21543
12354	21354	21345	21453	21435	21543	21534
12435	21435	21534	21345	21543	21354	21453
12453	21453	21543	21354	21534	21345	21435
12534	21534	21435	21543	21345	21453	21354
12543	21543	21453	21534	21354	21435	21345
21345	12345	12354	12435	12453	12534	12543
21354	12354	12345	12453	12435	12543	12534
21435	12435	12534	12345	12543	12354	12453
21453	12453	12543	12354	12534	12345	12435
21534	12534	12435	12543	12345	12453	12354
21543	12543	12453	12534	12354	12435	12345

復習：同型性と位数

群 $(G,\circ),(G',\circ')$ と $(G,\circ)$ から $(G',\circ')$ への同型写像 f

性質 (復習)：同型性と位数

任意の $x \in G$ に対して，

$$G \text{ における } x \text{ の位数} = G' \text{ における } f(x) \text{ の位数}$$

正六角形の
回転・鏡映対称性 G

要素	位数	要素	位数
1	1	s	2
r	6	rs	2
r^2	3	r^2s	2
r^3	2	r^3s	2
r^4	3	r^4s	2
r^5	6	r^5s	2

$K_{2,3}$ の自己同型性 G'

要素	位数	要素	位数
12345	1	21345	2
12354	2	21354	2
12435	2	21435	2
12453	3	21453	6
12534	3	21534	6
12543	2	21543	2

同型写像の構成 (1)

同型写像 $f\colon G \to G'$ を構成する

正六角形の
回転・鏡映対称性 G

要素	位数	要素	位数
1	1	s	2
r	6	rs	2
r^2	3	r^2s	2
r^3	2	r^3s	2
r^4	3	r^4s	2
r^5	6	r^5s	2

$K_{2,3}$ の自己同型性 G'

要素	位数	要素	位数
12345	1	21345	2
12354	2	21354	2
12435	2	21435	2
12453	3	21453	6
12534	3	21534	6
12543	2	21543	2

位数から，次が要請される

- $f(1) = 12345$
- 「$f(r^2) = 12453, f(r^4) = 12534$」か「$f(r^2) = 12534, f(r^4) = 12453$」

仮に，$f(r^2) = 12453, f(r^4) = 12534$ とする

部分群と正規部分群

群 G, G'，同型写像 $f\colon G \to G'$，部分群 $H \subseteq G$

群同型定理 (第一群同型定理)

H が G の正規部分群 $\Rightarrow$
$f(H)$ は G' の正規部分群で，G/H と $G'/f(H)$ は同型

まず，位数 2 の正規部分群が存在するか，そして，
存在するならば，どれが正規部分群なのか，調べる

正六角形の回転・鏡映対称性：位数 2 の部分群 (1)

	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	rs	r^2s	r^3s	r^4s	r^5s
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	rs	r^2s	r^3s	r^4s	r^5s
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1	rs	r^2s	r^3s	r^4s	r^5s	s
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2s	r^3s	r^4s	r^5s	s	rs
r^3	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3s	r^4s	r^5s	s	rs	r^2s
r^4	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4s	r^5s	s	rs	r^2s	r^3s
r^5	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5s	s	rs	r^2s	r^3s	r^4s
s	s	r^5s	r^4s	r^3s	r^2s	rs	1	r^5	r^4	r^3	r^2	r
rs	rs	s	r^5s	r^4s	r^3s	r^2s	r	1	r^5	r^4	r^3	r^2
r^2s	r^2s	rs	s	r^5s	r^4s	r^3s	r^2	r	1	r^5	r^4	r^3
r^3s	r^3s	r^2s	rs	s	r^5s	r^4s	r^3	r^2	r	1	r^5	r^4
r^4s	r^4s	r^3s	r^2s	rs	s	r^5s	r^4	r^3	r^2	r	1	r^5
r^5s	r^5s	r^4s	r^3s	r^2s	rs	s	r^5	r^4	r^3	r^2	r	1

群 G の位数 2 の部分群は 7 つ存在する

$$\{1, r^3\}, \{1, s\}, \{1, rs\}, \{1, r^2s\}, \{1, r^3s\}, \{1, r^4s\}, \{1, r^5s\}$$

正六角形の回転・鏡映対称性：位数 2 の部分群 (2)

この中で，正規部分群であるのは $\{1, r^3\}$ のみ

- $\{1, s\}$ に対して，
  - $r\{1, s\} = \{r, s\}$ であり，$\{1, s\}r = \{r, sr\} = \{r, r^5s\}$
- $\{1, rs\}$ に対して，
  - $r\{1, rs\} = \{r, r^2s\}$ であり，$\{1, rs\}r = \{r, rsr\} = \{r, s\}$
- $\{1, r^2s\}$ に対して，
  - $r\{1, r^2s\} = \{r, r^3s\}$ であり，$\{1, r^2s\}r = \{r, r^2sr\} = \{r, rs\}$
- $\{1, r^3s\}$ に対して，
  - $r\{1, r^3s\} = \{r, r^4s\}$ であり，$\{1, r^3s\}r = \{r, r^3sr\} = \{r, r^2s\}$
- $\{1, r^4s\}$ に対して，
  - $r\{1, r^4s\} = \{r, r^5s\}$ であり，$\{1, r^4s\}r = \{r, r^4sr\} = \{r, r^3s\}$
- $\{1, r^5s\}$ に対して，
  - $r\{1, r^5s\} = \{r, s\}$ であり，$\{1, r^5s\}r = \{r, r^5sr\} = \{r, r^4s\}$

正六角形の回転・鏡映対称性：位数 2 の部分群 (3)

この中で，正規部分群であるのは $\{1, r^3\}$ のみ ($H = \{1, r^3\}$ とする)

- $\{1, r^3\}$ に対して，
  - $1\{1, r^3\} = \{1, r^3\}$ であり，$\{1, r^3\}1 = \{1, r^3\}$
  - $r\{1, r^3\} = \{r, r^4\}$ であり，$\{1, r^3\}r = \{r, r^4\}$
  - $r^2\{1, r^3\} = \{r^2, r^5\}$ であり，$\{1, r^3\}r^2 = \{r^2, r^5\}$
  - $r^3\{1, r^3\} = \{r^3, 1\}$ であり，$\{1, r^3\}r^3 = \{r^3, 1\}$
  - $r^4\{1, r^3\} = \{r^4, r\}$ であり，$\{1, r^3\}r^4 = \{r^4, r\}$
  - $r^5\{1, r^3\} = \{r^5, r^2\}$ であり，$\{1, r^3\}r^5 = \{r^5, r^2\}$
  - $s\{1, r^3\} = \{s, r^3s\}$ であり，$\{1, r^3\}s = \{s, r^3s\}$
  - $rs\{1, r^3\} = \{rs, r^4s\}$ であり，$\{1, r^3\}rs = \{rs, r^4s\}$
  - $r^2s\{1, r^3\} = \{r^2s, r^5s\}$ であり，$\{1, r^3\}r^2s = \{r^2s, r^5s\}$
  - $r^3s\{1, r^3\} = \{r^3s, s\}$ であり，$\{1, r^3\}r^3s = \{r^3s, s\}$
  - $r^4s\{1, r^3\} = \{r^4s, rs\}$ であり，$\{1, r^3\}r^4s = \{r^4s, rs\}$
  - $r^5s\{1, r^3\} = \{r^5s, r^2s\}$ であり，$\{1, r^3\}r^5s = \{r^5s, r^2s\}$

$K_{2,3}$ の自己同型群：位数 2 の部分群

$K_{2,3}$ の自己同型群 G' の位数 2 の部分群は 7 つ存在する

- $\{12345, 12354\}$
- $\{12345, 12435\}$
- $\{12345, 12543\}$
- $\{12345, 21345\}$
- $\{12345, 21354\}$
- $\{12345, 21435\}$
- $\{12345, 21543\}$

この中で，正規部分群であるのは，$\{12345, 21345\}$ のみ

- $\therefore f(H) = \{12345, 21345\}$
- つまり，同型写像 $f\colon G \to G'$ は次を満たす

$$f(r^3) = 21345$$

正六角形の回転・鏡映対称性：剰余類

G/H を考えると，G/H は群になる

- $G/H = \{\{1, r^3\}, \{r, r^4\}, \{r^2, r^5\}, \{s, r^3s\}, \{rs, r^4s\}, \{r^2, r^5s\}$

G/H の群表

	$\{1, r^3\}$	$\{r, r^4\}$	$\{r^2, r^5\}$	$\{s, r^3s\}$	$\{rs, r^4s\}$	$\{r^2s, r^5s\}$
$\{1, r^3\}$	$\{1, r^3\}$	$\{r, r^4\}$	$\{r^2, r^5\}$	$\{s, r^3s\}$	$\{rs, r^4s\}$	$\{r^2s, r^5s\}$
$\{r, r^4\}$	$\{r, r^4\}$	$\{r^2, r^5\}$	$\{1, r^3\}$	$\{rs, r^4s\}$	$\{r^2s, r^5s\}$	$\{s, r^3s\}$
$\{r^2, r^5\}$	$\{r^2, r^5\}$	$\{1, r^3\}$	$\{r, r^4\}$	$\{r^2s, r^5s\}$	$\{s, r^3s\}$	$\{rs, r^4s\}$
$\{s, r^3s\}$	$\{s, r^3s\}$	$\{r^2s, r^5s\}$	$\{rs, r^4s\}$	$\{1, r^3\}$	$\{r^2, r^5\}$	$\{r, r^4\}$
$\{rs, r^4s\}$	$\{rs, r^4s\}$	$\{s, r^3s\}$	$\{r^2s, r^5s\}$	$\{r, r^4\}$	$\{1, r^3\}$	$\{r^2, r^5\}$
$\{r^2s, r^5s\}$	$\{r^2s, r^5s\}$	$\{rs, r^4s\}$	$\{s, r^3s\}$	$\{r^2, r^5\}$	$\{r, r^4\}$	$\{1, r^3\}$

$K_{2,3}$ の自己同型群：剰余類

また，$G'/f(H)$ も群になる

- $G'/f(H) = \{\{12345, 21345\}, \{12354, 21354\}, \{12435, 21435\},$
  $\{12453, 21453\}, \{12534, 21534\}, \{12543, 21543\}\}$

$G'/f(H)$ の群表

	$\{12345, 21345\}$	$\{12354, 21354\}$	$\{12435, 21435\}$	$\{12453, 21453\}$	$\{12534, 21534\}$	$\{12543, 21543\}$
$\{12345, 21345\}$	$\{12345, 21345\}$	$\{12354, 21354\}$	$\{12435, 21435\}$	$\{12453, 21453\}$	$\{12534, 21534\}$	$\{12543, 21543\}$
$\{12354, 21354\}$	$\{12354, 21354\}$	$\{12345, 21345\}$	$\{12453, 21453\}$	$\{12435, 21435\}$	$\{12543, 21543\}$	$\{12534, 21534\}$
$\{12435, 21435\}$	$\{12435, 21435\}$	$\{12534, 21534\}$	$\{12345, 21345\}$	$\{12543, 21543\}$	$\{12354, 21354\}$	$\{12453, 21453\}$
$\{12453, 21453\}$	$\{12453, 21453\}$	$\{12543, 21543\}$	$\{12354, 21354\}$	$\{12534, 21534\}$	$\{12345, 21345\}$	$\{12435, 21435\}$
$\{12534, 21534\}$	$\{12534, 21534\}$	$\{12435, 21435\}$	$\{12543, 21543\}$	$\{12345, 21345\}$	$\{12453, 21453\}$	$\{12354, 21354\}$
$\{12543, 21543\}$	$\{12543, 21543\}$	$\{12453, 21453\}$	$\{12534, 21534\}$	$\{12354, 21354\}$	$\{12435, 21435\}$	$\{12345, 21345\}$

群同型定理より，G/H と $G'/f(H)$ は同型で，
その同型写像 f' は次で与えられる

$$f'(gH) = f(g)f(H)$$

剰余群における各要素の位数

G/H

要素	位数
$\{1, r^3\}$	1
$\{r, r^4\}$	3
$\{r^2, r^5\}$	3
$\{s, r^3s\}$	2
$\{rs, r^4s\}$	2
$\{r^2s, r^5s\}$	2

$G'/f(H)$

要素	位数
$\{12345, 21345\}$	1
$\{12354, 21354\}$	2
$\{12435, 21435\}$	2
$\{12453, 21453\}$	3
$\{12534, 21534\}$	3
$\{12543, 21543\}$	2

位数から，次が要請される

- $f(r^2) = 12453, f(r^4) = 12534$ のとき，$f(r^5) = 21453, f(r) = 21534$
- $f(r^2) = 12534, f(r^4) = 12453$ のとき，$f(r^5) = 21534, f(r) = 21453$

$f(r^2) = 12453, f(r^4) = 12534$ と仮定したので，$f(r) = 21534$ となる

正六角形の回転・鏡映対称性：位数 6 の部分群 (1)

	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	rs	r^2s	r^3s	r^4s	r^5s
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	rs	r^2s	r^3s	r^4s	r^5s
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1	rs	r^2s	r^3s	r^4s	r^5s	s
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2s	r^3s	r^4s	r^5s	s	rs
r^3	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3s	r^4s	r^5s	s	rs	r^2s
r^4	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4s	r^5s	s	rs	r^2s	r^3s
r^5	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5s	s	rs	r^2s	r^3s	r^4s
s	s	r^5s	r^4s	r^3s	r^2s	rs	1	r^5	r^4	r^3	r^2	r
rs	rs	s	r^5s	r^4s	r^3s	r^2s	r	1	r^5	r^4	r^3	r^2
r^2s	r^2s	rs	s	r^5s	r^4s	r^3s	r^2	r	1	r^5	r^4	r^3
r^3s	r^3s	r^2s	rs	s	r^5s	r^4s	r^3	r^2	r	1	r^5	r^4
r^4s	r^4s	r^3s	r^2s	rs	s	r^5s	r^4	r^3	r^2	r	1	r^5
r^5s	r^5s	r^4s	r^3s	r^2s	rs	s	r^5	r^4	r^3	r^2	r	1

群 G の位数 6 の部分群は 3 つ存在する

- $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$ (アーベル群)
- $\{1, r^2, r^4, rs, r^3s, r^5s\}$ (非可換群)
- $\{1, r^2, r^4, s, r^2s, r^4s\}$ (非可換群)

$K_{2,3}$ の自己同型群：位数 6 の部分群

$K_{2,3}$ の自己同型群 G' の位数 6 の部分群は 3 つ存在する

- $\{12345, 21453, 12534, 21345, 12453, 21534\}$ (アーベル群)
- $\{12345, 12354, 12435, 12453, 12534, 12543\}$ (非可換群)
- $\{12345, 12453, 12534, 21354, 21543, 21435\}$ (非可換群)

同型写像はアーベル群をアーベル群に写すので (演習問題 6.9)

- f は $\{1, r^2, r^4, s, r^2s, r^4s\}$ を
  $\{12345, 12354, 12435, 12453, 12534, 12543\}$ か
  $\{12345, 12453, 12534, 21354, 21543, 21435\}$ に写す

$f(1) = 12345, f(r^2) = 12453, f(r^4) = 12534$ としたので，

- 仮に，$f(s) = 21543$ とする

見つかった同型写像 (証明はまだ)

見つかった同型写像

$f(r) = 21534, f(s) = 21543$

他の要素の写り先は，同型写像であるという性質から決まる

- $f(r^2) = f(r)^2 = (21534)^2 = 12453$
- $f(r^3) = f(r)^3 = (21534)^3 = 21345$
- $f(r^4) = f(r)^4 = (21534)^4 = 12534$
- $f(r^5) = f(r)^5 = (21534)^5 = 21453$
- $f(rs) = f(r)f(s) = (21534)\ (21543) = 12354$
- $f(r^2s) = f(r^2)f(s) = (12453)\ (21543) = 21435$
- $f(r^3s) = f(r^3)f(s) = (21345)\ (21543) = 12543$
- $f(r^4s) = f(r^4)f(s) = (12534)\ (21543) = 21354$
- $f(r^5s) = f(r^5)f(s) = (21453)\ (21543) = 12435$

確かに，$f\colon G \to G'$ は全単射である

見つかった同型写像：証明

f によって関係式が保存されることを証明すれば十分である

つまり，$f(r)^6 = 12345,\ f(s)^2 = 12345,\ f(r)f(s)f(r)f(s) = 12345$

$$\begin{aligned}
f(r)^6 &= (21534)^6 \\
&= (21534)^3\ (21534)^3 = (21345)\ (21345) = 12345 \\
f(s)^2 &= (21543)^2 = (21543)\ (21543) = 12345 \\
f(r)f(s)f(r)f(s) &= (21534)\ (21543)\ (21534)\ (21543) \\
&= (12354)\ (12354) = 12345 \qquad \square
\end{aligned}$$