

提出締切：2020年2月4日 13:00 西4号館4階事務室前 レポート提出箱「岡本」

**復習問題 14.1** 1人のギャンブラーが  $n$  万円を所持している。彼が賭けを1回行うごとに、 $1/2$ の確率で所持金は1万円増加し、 $1/2$ の確率で所持金は1万円減少する。賭けは繰り返し行われ、所持金が0万円か  $3n$  万円になると終了する。以下の問いに答えよ。

- 所持金が  $k$  万円であるとき、0万円で終了する確率を  $p_k$  で表す。すなわち、

$$p_k = \Pr(\exists t \geq 0: X_t = 0 \mid X_0 = k)$$

と定義する。このとき、次の漸化式が成立することを示せ。

$$p_k = \begin{cases} 1 & (k = 0 \text{ のとき}), \\ \frac{1}{2}p_{k-1} + \frac{1}{2}p_{k+1} & (1 \leq k \leq 3n - 1 \text{ のとき}), \\ 0 & (k = 3n \text{ のとき}). \end{cases}$$

- 上の小問の漸化式を解くことで、任意の  $k \in \{0, \dots, 3n\}$  に対する  $p_k$  が何であるか、定めよ。

**復習問題 14.2** 問題 14.1 と同じ状況を考える。ギャンブラーが  $k$  万円所持しているとき、そこから終了までに賭けを行う回数の期待値を  $T_{n,k}$  で表す。すなわち、

$$T_{n,k} = E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k]$$

とする。以下の問いに答えよ。

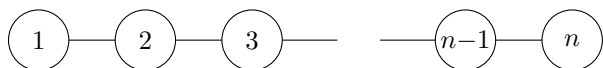
- $T_{n,0} = T_{n,3n} = 0$  となることを示せ。
- $1 \leq k \leq 3n - 1$  のとき、次が成り立つことを示せ。

$$T_{n,k} = 1 + \frac{1}{2}T_{n,k-1} + \frac{1}{2}T_{n,k+1}.$$

(ヒント：問題 14.5 を用いてもよい。)

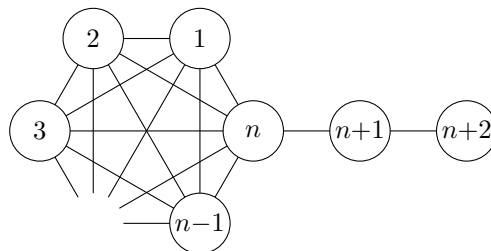
- 上の小問で得られた漸化式を解き、 $T_{n,k}$  の一般項を定めよ。

**復習問題 14.3** 次の図で表されるグラフ上の単純ランダムウォークを考える。これは頂点数  $n$  の道である。



このとき、頂点1から頂点  $n$  への到達時刻の期待値を求めよ。

**復習問題 14.4** 次の図で表されるグラフ上の単純ランダムウォークを考える。これは頂点数  $n$  の完全グラフに長さ2の道が貼り付けられたものである。



このとき、頂点1から頂点  $n+2$  への到達時刻の期待値を求めよ。

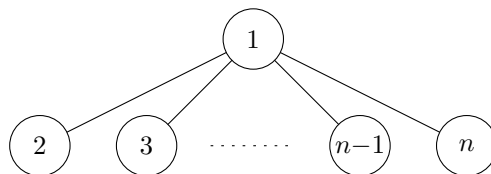
**補足問題 14.5** 任意の自然数値確率変数  $X, Y$  と事象  $A$  に対して、 $\Pr(A) \neq 0$  のとき

$$E[X \mid A] = \sum_{i \in \mathbb{N}} E[X \mid A \text{ かつ } Y = i] \Pr(Y = i \mid A)$$

が成り立つことを証明せよ。

**追加問題 14.6** 問題 14.1 の状況において、彼が賭けを1回行うごとに、 $2/3$ の確率で所持金は1万円増加し、 $1/3$ の確率で所持金は1万円減少するとする。このとき、所持金が0万円となって終了する確率を計算せよ。

**追加問題 14.7** 次の図で表されるグラフ上の単純ランダムウォークを考える。これは頂点1に他の  $n-1$  個の頂点がすべて隣接するが、その他に隣接関係が存在しないものである。



このとき、頂点1から頂点  $n$  への到達時刻の期待値を求めよ。