

提出締切：2020年1月7日 講義終了時

以降の問題では、自然数  $n \in \mathbb{N}$  と実数  $p \in (0, 1)$  に対して、頂点数が  $n$ 、辺確率が  $p$  であるような、エルデシュとレニィのランダム・グラフを  $\mathbb{G}(n, p)$  で表す。

**復習問題 10.1**  $\mathbb{G}(n, p)$  に従って得られるグラフ  $G = (V, E)$  を考える。

1. 任意の頂点  $v \in V$  に対して、その次数  $\deg(v)$  が次を満たすことを証明せよ。

$$E[\deg(v)] = (n-1)p.$$

2. 任意の頂点  $v \in V$  に対して、その次数  $\deg(v)$  が次を満たすことを証明せよ。

$$\Pr(\deg(v) \geq 2(n-1)p) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

**復習問題 10.2** 任意の (離散) 確率変数  $X$  と正実数  $t > 0$  に対して、 $E[X]$  と  $E[X^2]$  が存在するとき、

$$\Pr(|X - E[X]| \geq t) \leq \frac{E[X^2] - E[X]^2}{t^2}$$

が成り立つことを証明せよ。(ヒント：マルコフの不等式を利用せよ。)

**復習問題 10.3**  $\mathbb{G}(n, p)$  に従って得られるグラフ  $G = (V, E)$  を考える。

1. 任意の正実数  $\varepsilon \in (0, 1)$  を考える。  $p \geq (1 + \varepsilon) \frac{\ln n}{n-1}$  であるとき、

$$\Pr(G \text{ が孤立点を含む}) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となることを証明せよ。

2. 任意の正実数  $\varepsilon \in (0, 1)$  を考える。  $p \leq (1 - \varepsilon) \frac{\ln n}{n-1}$  であるとき、

$$\Pr(G \text{ が孤立点を含む}) \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となることを証明せよ。(ヒント：演習問題 10.2 を用いるとよい。)

**追加問題 10.4**  $\mathbb{G}(n, p)$  に従って得られるグラフ  $G = (V, E)$  を考える。このとき、辺数  $|E|$  の期待値を求めよ。

**追加問題 10.5**  $\mathbb{G}(n, p)$  に従って得られるグラフ  $G = (V, E)$  を考える。0 以上  $n$  未満の自然数  $k \in \mathbb{N}$  に対して、 $G$  における次数  $k$  の頂点数の期待値を求めよ。

**追加問題 10.6** 無向グラフ  $G = (V, E)$  における三角形とは、異なる3頂点  $u, v, w \in V$  で、 $\{u, v\}, \{v, w\}, \{u, w\} \in E$  を満たすもののことである。

$\mathbb{G}(n, p)$  に従って得られるグラフ  $G = (V, E)$  を考える。

1. 異なる3頂点  $u, v, w \in V$  に対して、次の確率変数  $X_{uvw}$  を考える。

$$X_{uvw} = \begin{cases} 1 & (G \text{ において } u, v, w \text{ が三角形である}) \\ 0 & (\text{そうではない}). \end{cases}$$

このとき、 $E[X_{uvw}]$  を求めよ。

2.  $G$  における三角形の総数を確率変数  $X$  で表す。このとき、 $E[X]$  を求めよ。

3. 任意の正実数  $\varepsilon \in (0, 1)$  を考える。  $p \leq \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$  であるとき、

$$\Pr(G \text{ が三角形を含む}) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となることを証明せよ。

4. 異なる3頂点  $u, v, w \in V$  と異なる3頂点  $u', v', w' \in V$  に対して、 $|\{u, v, w\} \cap \{u', v', w'\}| = 0$  のとき、 $E[X_{uvw} X_{u'v'w'}]$  を求めよ。

5. 異なる3頂点  $u, v, w \in V$  と異なる3頂点  $u', v', w' \in V$  に対して、 $|\{u, v, w\} \cap \{u', v', w'\}| = 1$  のとき、 $E[X_{uvw} X_{u'v'w'}]$  を求めよ。

6. 異なる3頂点  $u, v, w \in V$  と異なる3頂点  $u', v', w' \in V$  に対して、 $|\{u, v, w\} \cap \{u', v', w'\}| = 2$  のとき、 $E[X_{uvw} X_{u'v'w'}]$  を求めよ。

7. 任意の正実数  $\varepsilon \in (0, 1)$  を考える。  $p \geq \frac{1}{n^{1-\varepsilon}}$  であるとき、

$$\Pr(G \text{ が三角形を含む}) \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となることを証明せよ。(ヒント：演習問題 10.2 を用いるとよい。)