

提出締切：2019年12月17日 講義終了時

復習問題 9.1 表の出る確率が p であり、裏の出る確率が $1-p$ であるような硬貨を考える。ただし、 $0 < p \leq 1$ である。この硬貨を続けて何回か独立に投げることを考える。以下の量が何になるか、答えよ。

1. n 回投げて、表が n 回出る確率。
2. n 回投げて、表が一度も出ない確率。
3. n 回投げて、表が一度は出る確率。
4. n 回投げたとき、表が出る回数の期待値。(ヒント：演習問題 9.6 の結果を用いてもよい。)
5. 表が出るまで投げ続けたとき、投げる回数の期待値。(ヒント：演習問題 9.7 の結果を用いてもよい。)

復習問題 9.2 演習問題 9.1 の設定を考える。 n 回硬貨を投げたとき、表の出る回数が $2pn$ 以上になる確率が $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束することを証明せよ。

復習問題 9.3 商品を買うと n 種類の景品の中の 1 つが当たる。その確率は商品の間で同一かつ独立であり、 $\frac{1}{n}$ である。全種類の景品を集め切るまでに購入する商品の数の期待値が nH_n となることを証明せよ。ただし、 H_n は第 n 調和数であり、

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

と定義される。(ヒント：「景品を j 種類所持した瞬間から、新しい景品が当たるまでに購入した商品の数」を確率変数とし、その期待値をまず計算せよ。)

復習問題 9.4 演習問題 9.3 の設定を考える。このとき、商品購入回数が $2nH_n$ を上回る確率が $\frac{1}{n+1}$ 以下になることを証明せよ。

復習問題 9.5 1 年の日数が k であり、部屋には m 人の学生がいるとする。学生 i の誕生日が j である確率は、すべての i と j に対して $\frac{1}{k}$ であり、それらの事象は互いに独立であるとする。

$m \geq \sqrt{(2 \ln 2)k} + 1$ のとき、この部屋に同じ誕生日を持つ 2 人の学生がいる確率は $\frac{1}{2}$ 以上になることを証明せよ。

補足問題 9.6 任意の複素数 x, y と任意の自然数 $n \geq 0$ に対して、次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$nx(x+y)^{n-1} = \sum_{j=0}^n j \binom{n}{j} x^j y^{n-j}.$$

ヒント：二項定理を用いてもよい。

補足問題 9.7 任意の実数 $0 < r < 1$ に対して、次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot r^{i-1} = \frac{1}{(1-r)^2}.$$

補足問題 9.8 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して、第 n 調和数 H_n は次の式

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

で定義される。第 n 調和数 H_n が以下の不等式を満たすことを証明せよ。

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n.$$

追加問題 9.9 演習問題 9.1 の設定を考える。以下の問いに答えよ。

1. n 回硬貨を投げたとき、表の出る回数を表す確率変数を X とする。定数 $c > 1$ に対して $E[c^X]$ が何であるか、答えよ。
2. 次の不等式を証明せよ。

$$\Pr(X \geq 2pn) \leq \left(\frac{1 + (c-1)p}{c^{2p}} \right)^n.$$

3. $p = 1/4$ のとき、この右辺を最小とする c を求めよ。

追加問題 9.10 演習問題 9.3 の設定を考える。任意の定数 $c > 0$ に対して、商品購入回数が $n \ln n + cn$ を上回る確率が e^{-c} 以下になることを証明せよ。

追加問題 9.11 演習問題 9.3 の設定を考える。自然数 $k \geq 1$ に対して、 k 個の商品を購入した後に得られる景品の種類数を確率変数 X で表す。このとき、 X の期待値を計算せよ。(ヒント：標示確率変数をうまく用いてみよ。景品 i に対して、 X_i を i が k 個の商品の購入によって得られなかったときに 1、得られたときに 0 となる確率変数とする。このとき、 $X = n - \sum_{i=1}^n X_i$ と表されることをまず確認せよ。)