

提出締切：2019年11月26日 講義終了時

復習問題 7.1 群 G とその非空な部分集合 $H \subseteq G$ を考える。 H が G の部分群であるための必要十分条件は、任意の $a, b \in H$ に対して、 $a^{-1}b \in H$ が成り立つことである。これを証明せよ。

復習問題 7.2 群 G, G' に対して同型写像 $f: G \rightarrow G'$ が存在すると仮定し、 G の部分群 H を考える。このとき、 $f(H)$ が G' の部分群であることを証明せよ。(ヒント：演習問題 7.7 を用いてもよい。)

復習問題 7.3 群 G とその部分集合 H_1, H_2 に対して、積 H_1H_2 を

$$H_1H_2 = \{h_1h_2 \mid h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\}$$

で定義する。以下を証明せよ。

1. H が G の部分群であるとき、 $HH = H$ となる。
2. 部分集合 $H_1, H_2, H_3 \subseteq G$ に対して、 $(H_1H_2)H_3 = H_1(H_2H_3)$ となる。

復習問題 7.4 H が G の正規部分群であるとき、 G/H は演習問題 7.3 で定義した積に関して群になることを証明せよ。(ヒント：演習問題 7.3 の結果を用いてもよい。)

復習問題 7.5 群 G, G' に対して同型写像 $f: G \rightarrow G'$ が存在すると仮定し、 G の部分群 H を考える。 H が G の正規部分群であるとき、 $f(H)$ が G' の正規部分群であることを証明せよ。

復習問題 7.6 群 G, G' に対して同型写像 $f: G \rightarrow G'$ が存在すると仮定し、 G の部分群 H を考える。 H が G の正規部分群であるとき、 G/H と $G'/f(H)$ は同型な群であることを証明せよ。(ヒント：演習問題 7.5 を用いてもよい。)

補足問題 7.7 群 G, G' に対して同型写像 $f: G \rightarrow G'$ が存在すると仮定する。

1. G の単位元 e と G' の単位元 e' に対して $f(e) = e'$ が成り立つことを証明せよ。
2. 任意の要素 $x \in G$ に対して、 $f(x)^{-1} = f(x^{-1})$ が成り立つことを証明せよ。

補足問題 7.8 群 G とその部分群 $H \subseteq G$ を考える。任意の $a, b \in G$ に対して、 $aH = bH$ となることで二項関係 $a \sim b$ を定義する。この二項関係が同値関係であることを証明せよ。

追加問題 7.9 群 G の部分群 H_1, H_2 に対して、 $H_1 \cap H_2$ も G の部分群であることを証明せよ。

追加問題 7.10 群 G の部分群 H を考える。 H が G の正規部分群であるための必要十分条件は、任意の $g \in G$ に対して、 $gHg^{-1} = H$ が成り立つことである。これを証明せよ。

追加問題 7.11 群 G とその非空な部分集合 $S \subseteq G$ に対して、

$$H = \{g \in G \mid \text{任意の } s \in S \text{ に対して, } sg = gs\}$$

として H を定義すると、 H は G の部分群になることを証明せよ。(ヒント：まず、任意の $a, b \in G$ に対して、 $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ が成り立つことを確認して、それを用いてもよい。)