離散数理工学 (6) 2019 年 11 月 12 日
演習問題 岡本 吉央

提出締切： 2019 年 11 月 19 日 講義終了時

復習問題 6.1 集合 $G = \{x, y, z, w\}$ と G 上の演算 $\circ$ が群を成し，次の群表を持つとする．その群の単位元と，各要素の逆元が何であるか，答えよ．

1.

$\circ$	x	y	z	w
x	x	y	z	w
y	y	z	w	x
z	z	w	x	y
w	w	x	y	z

2.

$\circ$	x	y	z	w
x	x	y	z	w
y	y	x	w	z
z	z	w	x	y
w	w	z	y	x

復習問題 6.2 任意の群 G を考える．任意の $x, y \in G$ に対して $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ が成り立つことを証明せよ．

復習問題 6.3 任意の無向グラフ G に対して，その自己同型写像全体の集合を $\mathrm{Aut}(G)$ で表すとする．このとき，$\mathrm{Aut}(G)$ は写像の合成 $\circ$ に関して群になること，つまり，$(\mathrm{Aut}(G), \circ)$ が群であることをを証明せよ．

復習問題 6.4 群 G, G' に対して，G から G' への同型写像 $f\colon G \to H$ が存在するとする．

1. e が G の単位元であるならば，$f(e)$ は G' の単位元であることを証明せよ．
2. 任意の $x \in G$ に対して，G における x の位数と G' における $f(x)$ の位数が等しいことを証明せよ．

補足問題 6.5 次に挙げる各集合と演算の組は群にならない．なぜならないのか，説明せよ．

1. 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ は乗法 $\times$ に関して群にならない．
2. 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は乗法 $\times$ に関して群にならない．
3. 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は減算 $-$ に関して群にならない．

追加問題 6.6 任意の群 G を考える．任意の要素 $x \in G$ に対して $(x^{-1})^{-1} = x$ が成り立つことを証明せよ．

追加問題 6.7 集合 $G = \{a, b, c, d\}$ と G 上の演算 $\circ$ が群を成し，次の群表を持つとする．しかし，その一部が「?」となり，不明である．これが群であるという条件から，「?」となっている部分を復元せよ．また，この群の単位元と，各要素の逆元が何であるか，答えよ．

$\circ$	a	b	c	d
a	?	?	d	?
b	a	?	?	?
c	?	c	?	?
d	c	?	?	a

注意：G は集合であるので，同じ要素があってはならない．例えば，$a = b$ となってはならないことに注意せよ．

追加問題 6.8 次の表示を持つ群 G の群表を答えよ．

$$G = \langle a, b \mid a^4 = e, a^2 = b^2, aba = b \rangle.$$

また，G の位数，および，各要素の逆元と位数が何であるか，答えよ．そして，G がアーベル群であるか，非可換群であるか，答えよ．

追加問題 6.9 群 G, H に対して，G から H への同型写像 $f\colon G \to H$ が存在するとする．このとき，G がアーベル群であるならば，H もアーベル群であることを証明せよ．

追加問題 6.10 群 $(G, \circ)$ は $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ であり，任意の $x, y \in G$ に対して

$$x \circ y = (x + y) \bmod 6$$

として定義されるものである．また，群 $(H, \star)$ は $H = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ であり，任意の $x, y \in H$ に対して

$$x \star y = xy \bmod 9$$

として定義されるものである．以下の問いに答えよ．

1. $(G, \circ)$ と $(H, \star)$ の群表を書き，$(G, \circ)$ と $(H, \star)$ が確かに群であることを確かめよ．
2. 群 $(G, \circ)$ と $(H, \star)$ が同型であることを証明せよ．

追加問題 6.11 次の表示を持つ 2 つの群 G, H を考える．

$$G = \langle r \mid r^4 = 1 \rangle,$$
$$H = \langle a, b \mid a^2 = 1, b^2 = 1, ab = ba \rangle.$$

以下の問いに答えよ．

1. 群 G と H の群表を書け．
2. 群 G と H における，各要素の位数が何であるか，答えよ．
3. 群 G と H が同型ではないことを証明せよ．