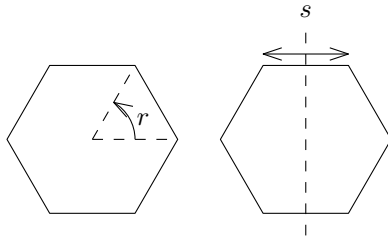


提出締切：2019年11月12日 講義終了時

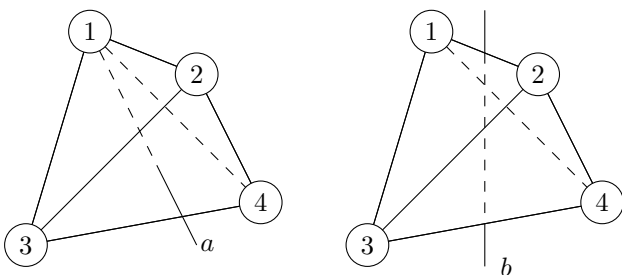
復習問題 5.1 原点を中心とする次のような正六角形を考える。



以下の問いに答えよ。

1. 原点を中心にして、反時計回りに  $60^\circ$  度だけ正六角形を回転を  $r$  で表す。操作  $r$  の合成によって、この正六角形を自分自身に写した結果で、互いに異なるものがちょうど6種類存在することを示せ
2. 原点を通る鉛直直線に対する鏡映を  $s$  で表す。操作  $r$  と  $s$  の合成によって、この正六角形を自分自身に写した結果で、互いに異なるものがちょうど12種類存在することを示せ。
3. 小問2における12種類の写し方を表す操作全体の集合が  $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$  と書けることを示せ。ただし、1は恒等変換を表す。
4. 上で与えた操作  $r, s$  が  $rsrs = 1$  を満たすことを示せ。
5.  $r^6 = 1, s^2 = 1, rsr = 1$  という関係を用いて、次の合成操作を集合  $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$  の要素として表せ。
  - (a)  $r^2sr^3sr^2$ .
  - (b)  $rs^2r^3s^4r^5s^7$ .

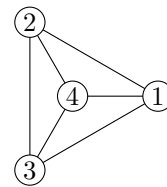
復習問題 5.2 次の図のような正四面体を考える。以下の問いに答えよ。



1. 正四面体を回転によって自分自身に写した結果で、互いに異なるものがちょうど12種類存在することを示せ。

2. 頂点1と三角形234の重心を通る直線の周りに、2を4, 3を2, 4を3に写すような回転を  $a$  で表し、辺12の中点と辺34の中点を通る直線の周りの  $180^\circ$  度回転を  $b$  で表す。この2つの操作を用いて、小問1における12種類の写し方を表す操作全体の集合が  $\{1, a, a^2, b, ab, a^2b, ba, aba, a^2ba, ba^2, aba^2, a^2ba^2\}$  と書けることを示せ。ただし、1は恒等変換を表す。
3. 上で与えた  $a, b$  が  $ababab = 1$  を満たすことを示せ。

復習問題 5.3 次のグラフ (頂点数4の完全グラフ) の自己同型写像はいくつあるか? 理由も付けて定めよ。

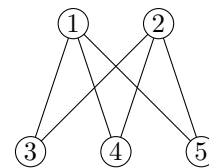


復習問題 5.4 無向グラフ  $G = (V, E)$  の自己同型写像  $f: V \rightarrow V$  を考える。このとき、任意の頂点  $v \in V$  に対して、

$$\deg_G(v) = \deg_G(f(v))$$

が成り立つことを証明せよ。

復習問題 5.5 次のグラフ (完全二部グラフ) の自己同型写像はいくつあるか? 理由も付けて定めよ。

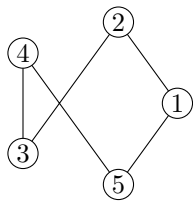


補足問題 5.6 任意の集合  $X$  と集合  $X$  上の置換  $f, g: X \rightarrow X$  を考える。このとき、合成写像  $f \circ g: X \rightarrow X$  も  $X$  上の置換であることを証明せよ。

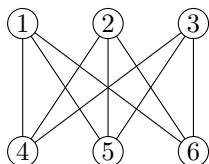
追加問題 5.7 演習問題5.1にあるような、原点を中心とする正六角形に対して、原点を中心とする反時計回りに  $60^\circ$  度の回転を  $r$  で表し、原点を通る水平直線に関する鏡映を  $t$  で表す。このとき、 $r$  と  $t$  の合成によって、この正六角形を自分自身に写した結果で、互いに異なるものがいくつあるか、その総数を答えよ。理由も付けること。

次ページに続く

追加問題 5.8 次のグラフの自己同型写像はいくつあるか？  
理由も付けて定めよ。



追加問題 5.9 次のグラフの自己同型写像はいくつあるか？  
理由も付けて定めよ。



追加問題 5.10 自己同型写像をちょうど1つしか持たないような無向グラフを構成せよ。なぜ、自己同型写像を1つしか持たないのか、説明せよ。(ヒント：頂点数6のものを考えればよい。)