**提出締切：** 2019 年 11 月 5 日 講義終了時

**復習問題 4.1** 次の漸化式を考える．

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって，数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ の一般項 $a_n$ を閉じた形で与えよ．

**復習問題 4.2** 次の漸化式を考える．

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって，数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の一般項 $a_n$ を閉じた形で与えよ．

**復習問題 4.3** 次の漸化式を考える．

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 3a_{n-1} + 2n & (n \geq 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって，数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の一般項 $a_n$ を閉じた形で与えよ．

**復習問題 4.4** 次の数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を考える．

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n \bmod 3 = 0 \text{ のとき}), \\ 4 & (n \bmod 3 = 1 \text{ のとき}), \\ 3 & (n \bmod 3 = 2 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって，数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の一般項 $a_n$ を閉じた形で与えよ．

---

**追加問題 4.5** 次の漸化式を考える．

$$d_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ d_{n-1} + 2d_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって，数列 $\{d_n\}_{n\geq 1}$ の一般項 $d_n$ を閉じた形で与えよ．

**追加問題 4.6** 次の漸化式を考える．

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 2b_{n-1} - 3n + 9 & (n \geq 2 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって，数列 $\{b_n\}_{n\geq 1}$ の一般項 $b_n$ を閉じた形で与えよ．

**追加問題 4.7** 次の漸化式を考える．

$$c_n = \begin{cases} 3 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 2c_{n-1} - n & (n \geq 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって，数列 $\{c_n\}_{n\geq 0}$ の一般項 $c_n$ を閉じた形で与えよ．

**復習問題 4.8** 次の数列 $\{e_n\}_{n\geq 0}$ を考える．

$$e_n = \begin{cases} 1 & (n \bmod 4 = 0 \text{ のとき}), \\ 4 & (n \bmod 4 = 1 \text{ のとき}), \\ 2 & (n \bmod 4 = 2 \text{ のとき}), \\ 3 & (n \bmod 4 = 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって，数列 $\{e_n\}_{n\geq 0}$ の一般項 $e_n$ を閉じた形で与えよ．

**復習問題 (発展) 4.9** 実定数 $a, b, c$ に対して，次の数列 $\{x_n\}_{n\geq 0}$ を考える．

$$x_n = \begin{cases} a & (n \bmod 3 = 0 \text{ のとき}), \\ b & (n \bmod 3 = 1 \text{ のとき}), \\ c & (n \bmod 3 = 2 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によると，ある複素数 $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ が存在して，$x_n$ は

$$x_n = \hat{a} + \hat{b}\,\omega^n + \hat{c}\,\omega^{2n} \quad (n \geq 0)$$

と書けることが分かる (これが正しいことは認めてよい)．ただし，$\omega = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}/3}$ である．このとき，次の等式が成り立つことを証明せよ．

$$|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = 3(|\hat{a}|^2 + |\hat{b}|^2 + |\hat{c}|^2).$$

複素数の絶対値の定義に注意せよ．(ヒント：「発展」と書いてあるが，難しいわけではない．)