離散最適化基礎論　第７回
多面体の基礎

高橋里司
stakahashi@uec.ac.jp

2018 年 12 月 6 日 (金)

国立大学法人
電気通信大学
Unique & Exciting Campus

当面のスケジュール（予定）

B. コルテ，J. フィーゲン：組合せ最適化，シュプリンガー（2009）の 3，4 章を解説

1. 多面体の基礎 (担当：高橋，12/7)
2. 弱理想グラフ定理（2)：多面体的手法（担当：村松，12/14）
3. 楕円体法（1）：基礎，アルゴリズム（担当：村松，12/21）
4. 楕円体法（2）：応用（担当：高橋，1/11）

今日のスライドは，`http://optlab.org/?page_id=682` で公開する．

線形計画法（復習）

線形計画問題 (最大化)

インスタンス： 行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ と 2 つの列ベクトル $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ と $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$.

タスク：

1. $A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$ を満たす列ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ が存在するかどうかを判定する.
2. 存在するならば，任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，$A\boldsymbol{x}_\alpha \le \boldsymbol{b}$ かつ $\boldsymbol{c}^\mathrm{T}\boldsymbol{x}_\alpha > \alpha$ となる $\boldsymbol{x}_\alpha \in \mathbb{R}^n$ が存在するかどうかを判定する.
3. そのような $\boldsymbol{x}_\alpha$ が存在しないならば，$A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ のうちで，$\boldsymbol{c}^\mathrm{T}\boldsymbol{x}$ を最大にするような $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ を求める.

線形計画問題 (LP) を $\max\{\boldsymbol{c}^\mathrm{T}\boldsymbol{x} : A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}\}$ と書くことにする.

線形計画法（復習）

LP $\max\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} : A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}\}$ に対して，$A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ を LP の実行可能解といい，$P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}\}$ を実行可能集合とする．

$\boldsymbol{x}^* \in P$ が LP の最適解 $\Leftrightarrow$ 任意の $\boldsymbol{x} \in P$ に対して，$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* \ge \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$.

LP が最適解を持たないときは，次の 2 つのケースのいずれかになる．

1. $P = \emptyset$ で実行不可能である場合．
2. 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対しても $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > \alpha$ となるような $\boldsymbol{x} \in P$ が存在する非有界である場合．

線形計画法

LP が実行不可能でも，非有界でもないときは，次のように最適解が存在する．

命題

$P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\} \neq \emptyset$ と $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\sup\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in P\} < \infty$ であるとする．そこで，$\delta = \sup\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in P\}$ とする．このとき，$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} = \delta$ を満たすベクトル $\boldsymbol{z} \in P$ が存在する．

これから，$\sup\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in P\}$ ではなく，$\max\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in P\}$ を用いても良いことになる．

多面体の基礎

組合せ最適化問題は，多くが LP で定式化できる（前回までの授業より）．
LP の実行可能領域 $P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$ は

$$P = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{c} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq b_1 \\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq b_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq b_m \end{array} \right\}, \quad A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_j \in \mathbb{R}^n$$

と表され，有限個の半空間の共通集合となる．

多面体の基礎

定義 (多面体)

行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ とベクトル $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ を用いて,
$P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$ と書ける集合 P を多面体 **(Polyhedron)** という． P が有界であれば， P を有界多面体 **(polytope)** という．

行列 A のランクを $\mathrm{rank}(A)$ と表す．空でない集合 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ に対して,

$$n - \max\{\mathrm{rank}(A) : A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X,\ A\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{y}\}$$

を X の次元といい，$\dim X$ と書く．多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^n$ は，$\dim P = n$ のとき，全次元 **(full-dimensional)** であるという．

多面体の基礎

定義

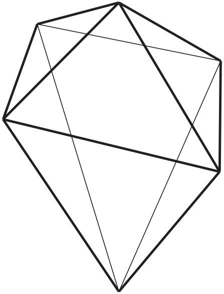
$P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}\}$ を空でない多面体とする．$\delta = \max\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in P\}$ が有限となる非零ベクトル $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \delta\}$ は P の支持超平面 **(supporting hyperplane)** と呼ばれる．

定義

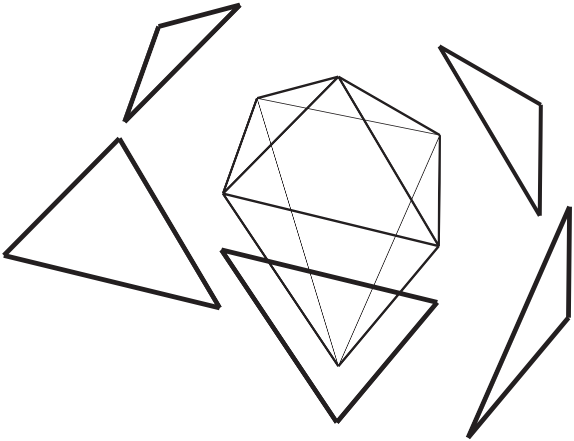
P の面 **(face)** は，P 自身，あるいは，P の支持超平面と P の共通部分として定義される．

$\{\boldsymbol{x}\}$ が面となる点 $\boldsymbol{x}$ は P の頂点と呼ばれ，系 $A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$ の基底解と呼ばれる．

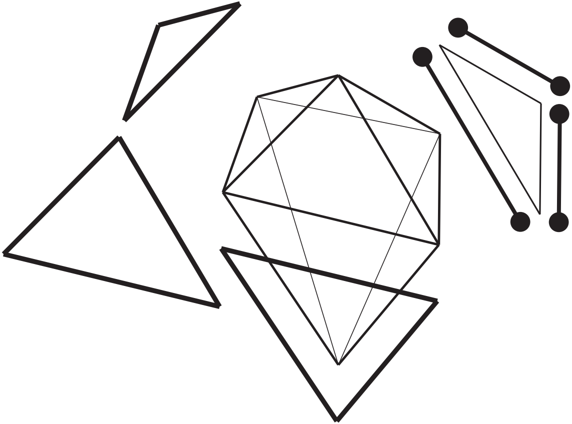
面の例



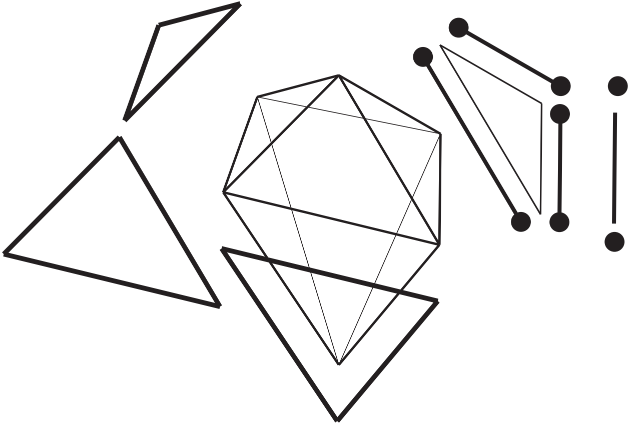
面の例



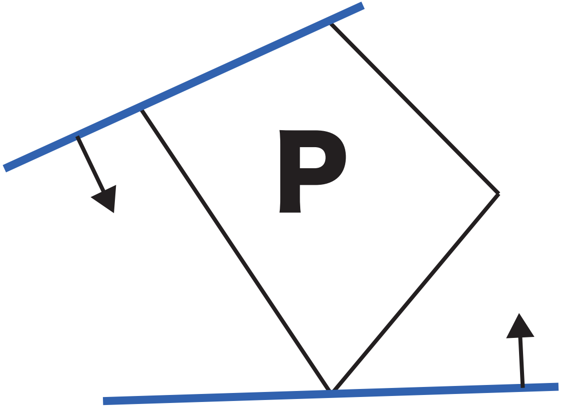
面の例



面の例



支持超平面の例



多面体の基礎

命題 (多面体の特徴付け)

$P = \{\boldsymbol{x} : A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$ を多面体とし，$F \subseteq P$ とする．このとき，以下の (a)-(c) は互いに等価である．

(a) F は P の面である．

(b) $\delta = \max\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in P\}$ が有限で，$F = \{\boldsymbol{x} \in P : \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \delta\}$ となるようなベクトル $\boldsymbol{c}$ が存在する．

(c) $F \neq \emptyset$ であり，$A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ のある部分系 $A'\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}'$ を用いて，$F = \{\boldsymbol{x} \in P : A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'\}$ と書ける．

多面体の基礎

(a)$\Leftrightarrow$ (b) は面の定義より明らか.

Proof.

(b)$\Rightarrow$(c) を示す． $F = \{\boldsymbol{x} : A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'\} = P \cap \{\boldsymbol{x} : A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'\} \neq \emptyset$ とする.
A の行ベクトルの和を $\boldsymbol{c}$ とし， $\boldsymbol{b}'$ の成分和を δ とする.
A， $\boldsymbol{b}$ の成分はいずれも $\pm\infty$ ではないものとしているので，明らかに δ は有限であり，任意の $\boldsymbol{x} \in F$ で $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \delta$ である.
さらに， $P = \{\boldsymbol{x} : A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$ から，任意の $\boldsymbol{x} \in P$ で $A'\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}'$ であるので， $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq \delta$ となる．一方，任意の $\boldsymbol{x} \in P \setminus F$ に対して，
$A'\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{b}'$ であるので， $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \neq \delta$ となる．従って，
$F = \{\boldsymbol{x} \in P : \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \delta\}$ となる. □

(c)$\Rightarrow$(b) は少し難しい.

多面体の基礎

重要な系

系

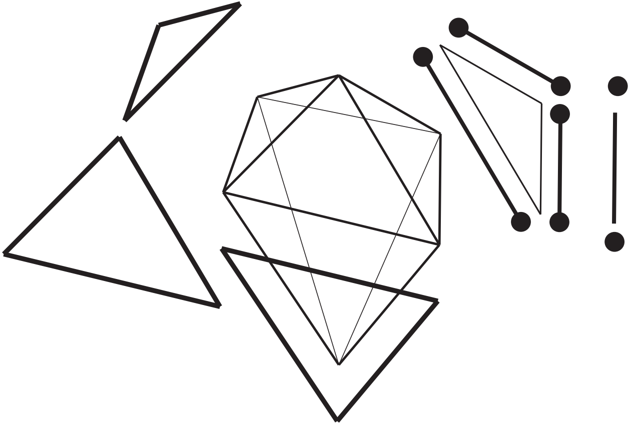
空でない多面体 P とベクトル $\boldsymbol{c}$ に対して，$\max\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in P\}$ が有界ならば，最大値を達成する点の集合は，P の面の *1* つに一致する．

系

F を多面体 P の面とする．すると F も多面体である．さらに，集合 $F' \subseteq F$ に対して，F' が P の面であることと，F' が F の面であることは等価である．

2 つの面 A, B に対して定義される "A は B の面である"という関係は推移的である．

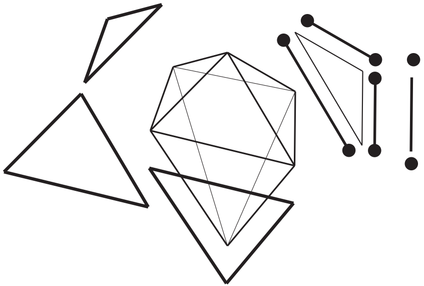
多面体の基礎



多面体の基礎 -重要な面 1-

定義

多面体 P において P と異なる極大な面を P のファセット **(facet)** という．不等式 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq \delta$ は，すべての $\boldsymbol{x} \in P$ で $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq \delta$ でありかつ $\{\boldsymbol{x} \in P : \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \delta\}$ が P のファセットであるとき，P のファセット定義 **(facet-defining)** 不等式と呼ばれる．



多面体の基礎 -重要な面 2- I

命題 (Hoffman and Kruskal(1956))

$P = \{\boldsymbol{x} : A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$ を多面体とする．空でない部分集合 $F \subseteq P$ に対して，F が P の極小な面であるための必要十分条件は，$A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ のある部分系 $A'\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}'$ を用いて $F = \{\boldsymbol{x} : A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'\}$ と書けることである．

多面体の基礎 -重要な面 2- II

Proof.

($\Rightarrow$)
F を P の極小な面とする．F は面より，$F = \{\boldsymbol{x} \in P : A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'\}$ となるような，$A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ の部分系 $A'\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}'$ として，極大な部分系を選ぶことにする．$A''\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}''$ を
$F = \{\boldsymbol{x} \in P : A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}', A''\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}''\}$ となる極小な部分系とする．この時，$A''\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}''$ は不等式を含まないことが言える．
そうではないと仮定して，$\boldsymbol{a}''^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq \beta''$ を 1 つの不等式とする．すると，この不等式は F を記述する冗長でない不等式になり，

$$F' = \{\boldsymbol{x} : A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}', A''\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}'', \boldsymbol{a}''\boldsymbol{x} = \beta''\}$$

は F のファセットになる．このとき，F' は P の面になり，F が極小な面であることに反する．従って，$F = \{\boldsymbol{x} : A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'\}$ となる．$\square$

多面体の基礎

- LP の最適解は，$P = \{\boldsymbol{x} : A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$ の面で達成されるので，先の命題より，$A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ の各極小な部分系の方程式 $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ を解くことで，有限時間で求めることができる．
- 効率的に求めるための単体法については，学部授業の数理計画法で述べられているので，スキップ．
- 単体法が多項式時間アルゴリズムではない例を紹介する．

多面錐

定義

- 集合 $C \in \mathbb{R}^n$ は，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C$ と任意の $\lambda, \mu \geq 0$ に対して，$\lambda \boldsymbol{x} + \mu \boldsymbol{y} \in C$ であるとき，錐 (cone) であると呼ばれる．
- 錐 C の要素 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ は任意の $\boldsymbol{x} \in C$ に対して，ある数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \geq 0$ を用いて，

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{x}_i$$

  と表せるとき，C を生成するという．
- C が有限個のベクトルで生成されるとき，その錐は有限生成であるという．
- $C = \{\boldsymbol{x} : A\boldsymbol{x} \leq 0\}$ と書けるとき，C を多面錐という．

多面錐

Lemma (Minkowski(1896))

多面錐 $C = \{\boldsymbol{x} : A\boldsymbol{x} \leq 0\}$ は，$\binom{A}{I}$ の n 個の線型独立な行ベクトルからなるある行列 M とある単位ベクトル $\boldsymbol{e}_j$ に対して $\boldsymbol{b}' = \pm\boldsymbol{e}_j$ となるベクトル $\boldsymbol{b}'$ を用いて $M\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}'$ と書ける方程式の解 $\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{b}'}$ の集合の部分集合で生成できる.

多面錐が有限生成であることの証拠

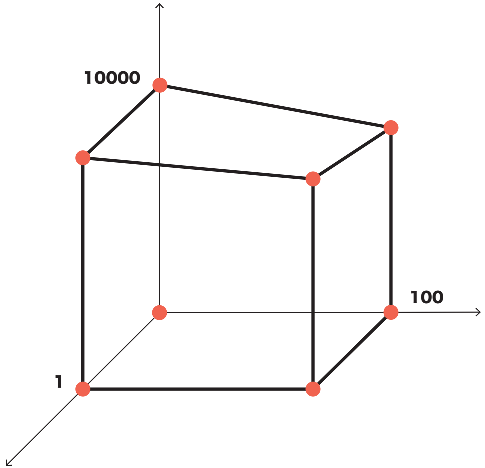
Klee-Minty の問題

Klee-Minty の問題

$$
\begin{aligned}
\text{最大化} \quad & \sum_{j=1}^{n} 10^{n-j} x_j \\
\text{条件} \quad & 2\sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} x_j + x_i \leq 100^{i-1} \quad 1 \leq i \leq n \\
& x_j \geq 0 \qquad\qquad j = 1, \dots, n
\end{aligned}
$$

$n = 3$ の例

$$
\begin{aligned}
\text{最大化} \quad & 100x_1 + 10x_2 + x_3 \\
\text{条件} \quad & x_i \leq 1 \\
& 20x_1 + x_2 \leq 100 \\
& 200x_1 + 20x_2 + x_3 \leq 10000 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$



- 変数 n，制約数 $2n$ の LP で Bland のピボットルールを用いる単体法が 2^n 回の反復を必要とする．
- 単体法が多項式時間アルゴリズムとなるようなピボットルールが存在するかは未知

有界多面体

有界多面体は有限個の点の凸包に一致することを示す.

定義

- $X \subseteq \mathbb{R}^n$ は，すべての $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ と $\lambda \in [0, 1]$ に対して，$\lambda \boldsymbol{x} + (1 - \lambda)\boldsymbol{y} \in X$ であるとき，凸であると呼ぶ.
- ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^n$ と $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ を満たす $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0$ に対して，
$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{x}_i$$
を $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^n$ の凸結合という.
- X の点の凸結合で得られるすべての点の集合を X の凸包といい，$\mathrm{conv}(X)$ と書く.
- $\boldsymbol{x} \in X$ かつ $\boldsymbol{x} \notin \mathrm{conv}(X \setminus \{\boldsymbol{x}\})$ となる点 $\boldsymbol{x}$ は集合 X の端点

有界多面体

性質

- 集合 X が凸であるための必要十分条件は，X の点のどの凸結合も X に含まれること．
- 集合 X の凸包は X を含む最小の凸集合．
- 凸集合 $X_1, X_2, \ldots X_n$ に対して，$\cap_{i=1}^{n} X_i$ は凸集合
- 半空間は凸集合なので，多面体は，凸集合である．

“有界多面体の有限基底定理”を証明する．

有界多面体 -有界多面体の有限基底定理- I

定理 (Minkowski (1896), Stenitz (1916), Weyl (1935))

集合 P が有界多面体であるための必要十分条件は，P がある有限集合の凸包であることである．

(Shrijver (1986)) の証明

$P = \{\boldsymbol{x} : A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$ を空でない有界多面体とし，

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} : \lambda \geq 0, A\boldsymbol{x} - \lambda \boldsymbol{b} \leq 0 \right\}$$

とする．明らかに次を満たす．

$$P = \left\{ \boldsymbol{x} : \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{pmatrix} \in C \right\}.$$

有界多面体 -有界多面体の有限基底定理- II

C は多面錐であり，有限個の非零ベクトルで生成できる．そこで，$\binom{\boldsymbol{x}_1}{\lambda_1}, \ldots, \binom{\boldsymbol{x}_k}{\lambda_k}$ を C を生成する有限個の非零ベクトルの極小なベクトル集合とする．P は有界であるので，どの λ_i も非零となる．

$\because$ $\lambda_1 = 0$ とすると，$\binom{\boldsymbol{x}_1}{\lambda_1}, \ldots, \binom{\boldsymbol{x}_k}{\lambda_k}$ の極小生より，$\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{0}$ であり，さらに，

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \mu_1 \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} + \cdots + \mu_k \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_k \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$

かつ $\mu_1 > 0, \mu_2, \ldots, \mu_k \geq 0$ となるような $\binom{\boldsymbol{x}}{1} \in C$ が存在する．
一方，任意の $\alpha > 0$ に対して，$\binom{\boldsymbol{x}}{1} + \alpha\mu_1 \binom{\boldsymbol{x}_1}{0} \in C$ であり，
$\boldsymbol{x} + \alpha\mu_1\boldsymbol{x}_1 \in P$ となるが，$\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{0}$ であるので，これは，P の有界性に反する．従って，$\lambda_1 \neq 0$ である．

有界多面体 -有界多面体の有限基底定理- III

一般性を失うことなく，全ての λ_i が 1 であると仮定できる．従って，$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in P$ である．さらに，$\boldsymbol{x} \in P$ であることと，$\mu_1, \ldots, \mu_k \geq 0$ を用いて，

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \mu_1 \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \cdots + \mu_k \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_k \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書けることとは等価になる．すなわち，$\mu_1 + \cdots + \mu_k = 1$ となり，P のどの点も $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ の凸結合で書け， P は $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ の凸包となる．

逆に，P が $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^n$ の凸包であるとする．すると，$\binom{\boldsymbol{x}_1}{1}, \binom{\boldsymbol{x}_2}{1}, \ldots, \binom{\boldsymbol{x}_k}{1}$ で生成される錐を C とおけば，$\boldsymbol{x} \in P$ と $\binom{\boldsymbol{x}}{1} \in C$ は等価になる．C は多面的であり，従って，

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} : \lambda \geq 0, A\boldsymbol{x} - \lambda \boldsymbol{b} \leq 0 \right\}$$

有界多面体 -有界多面体の有限基底定理- IV

と書ける．$\boldsymbol{x} \in P$ と $\binom{\boldsymbol{x}}{1} \in C$ の等価性より，
$P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{0}\}$ となり，P は多面体になる．P の有界性は，明らかである．

有界多面体

系

有界多面体は，その頂点全体の凸包である．

Proof.

P を有界多面体とする．有界多面体の有限基底定理より，P の頂点の凸包は，多面体 Q になる．構成の仕方より，$Q \subseteq P$ となる．ここで，$\boldsymbol{z} \in P \setminus Q$ が存在したと仮定する．すると，$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} > \max\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in Q\}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{c}$ が存在する．一方，P の支持超平面 $\{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \max\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} : \boldsymbol{y} \in P\}\}$ は $\max\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} : \boldsymbol{y} \in P\} \geq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} > \max\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in Q\}$ より，Q の点を含まない P の面を定義することになる．これは不可能である．　□

有界多面体

台集合 E と部分集合 $X \subseteq E$ に対して，E に関する X の接続ベクトルとは，$e \in X$ ならば，$x_e = 1$，$e \in E \setminus X$ ならば，$x_e = 0$ として定義されるベクトル $\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^{|E|}$ である．

系

集合システム $(E, \mathcal{F})$，$\mathcal{F}$ の要素の接続ベクトル全体の凸包 P，関数 $c : E \to \mathbb{R}$ に対して，

$$\max\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in P\} = \max\{c(X) : X \in \mathcal{F}\}$$

である．

$\mathcal{F}$ は E の部分集合族である．

有界多面体 I

系

$$\max\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in P\} = \max\{c(X) : X \in \mathcal{F}\}$$

$$\max\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in P\} \geq \max\{c(X) : X \in \mathcal{F}\}$$

は自明であるので，逆の不等式を示す．$\boldsymbol{x}^*$ を $\max\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in P\}$ の最適解とする．P の定義より，$\boldsymbol{x}^*$ は $\mathcal{F}$ の要素のある接続ベクトル $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_k$ の凸結合で表せる．すなわち，$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ を満たす $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0$ を用いて，

$$\boldsymbol{x}^* = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{y}_i$$

有界多面体 II

と書ける．$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{c}\boldsymbol{y}_i$ であるので，少なくとも 1 つの i に対して，$\boldsymbol{c}\boldsymbol{y}_i \geq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*$ となる．この $\boldsymbol{y}_i$ は $c(Y) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{y}_i \geq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*$ を満たす集合 $Y \in \mathcal{F}$ の接続ベクトルである．すなわち $c(Y) \geq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*$ となり，逆の不等式が得られる．

来週以降の注意

- 来週以降は村松先生がしばらく担当される.
- 本日配布した資料を必ず持ってくる
- スライドではなく，板書で講義するため，ノートを持参すること.

1. 多面体の基礎 (担当：高橋，12/7)
2. 弱理想グラフ定理（2)：多面体的手法（担当：村松，12/14）
3. 楕円体法（1）：基礎，アルゴリズム（担当：村松，12/21）
4. 楕円体法（2）：応用（担当：高橋，1/11）