離散最適化基礎論　第 3 回
代表的な理想グラフ (2)：二部グラフの補グラフ

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2018 年 10 月 19 日

最終更新：2018 年 10 月 19 日　16:33

スケジュール 前半 (予定)

1. 理想グラフと組合せ最適化 (10/5)
2. 代表的な理想グラフ (1)：二部グラフと二部グラフの線グラフ (10/12)
3. 代表的な理想グラフ (2)：二部グラフの補グラフ (10/19)
4. 代表的な理想グラフ (3)：区間グラフと弦グラフ (10/26)

⋆ 出張のため休講 (11/2)

5. 弱理想グラフ定理 (1)：グラフ理論的手法 (11/9)
6. 組合せ最適化と線形計画法 (11/16)

⋆ 調布祭 のため 休み (11/23)

7. 凸多面体の基礎 (11/30)
8. 弱理想グラフ定理 (2)：多面体的手法 (12/7)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

9 楕円体法 (1)：基礎 (12/14)
10 楕円体法 (2)：アルゴリズム (12/21)
11 組合せ最適化と半正定値計画法 (1/11)
⋆ センター試験準備 のため 休み (1/18)
12 グラフのシャノン容量 (1/25)
13 理想グラフに対するアルゴリズム (2/1)
14 予備？ (2/8)
⋆ 期末試験 (2/15？)

注意：予定の変更もありうる

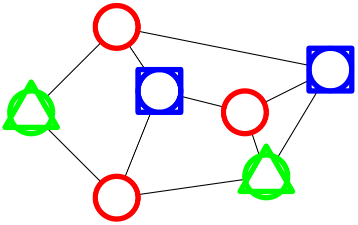
染色数

グラフ $G = (V, E)$

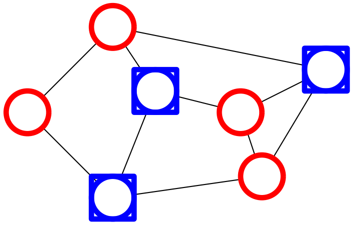
定義：染色数とは？

G の染色数とは，G の k 彩色が存在するような最小の k

G の染色数を $\chi(G)$ で表す



3 彩色である



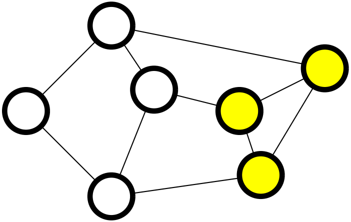
2 彩色は存在しない

∴ このグラフの染色数は 3

定義：グラフのクリークとは？

グラフ G のクリークとは，頂点部分集合 C で，
その中のどの 2 頂点も辺で結ばれているもの

クリークの頂点数の最大値を $\omega(G)$ で表す (G のクリーク数と呼ぶ)



観察 (弱双対性)

任意のグラフ G に対して

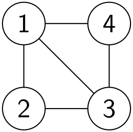
- $\chi(G) \geq \omega(G)$

グラフ $G = (V, E)$

定義：理想グラフとは？

G が理想グラフであるとは，次が成り立つこと

$$\chi(H) = \omega(H) \qquad \forall\ \text{誘導部分グラフ}\ H \subseteq G$$



前回の内容

代表的な理想グラフの紹介

- 二部グラフ (簡単)
- 二部グラフの線グラフ (Kőnig の定理)

今日の内容

代表的な理想グラフの紹介

- 二部グラフの補グラフ (Kőnig–Egerváry の定理)
- 二部グラフの線グラフの補グラフ (演習問題)

目次

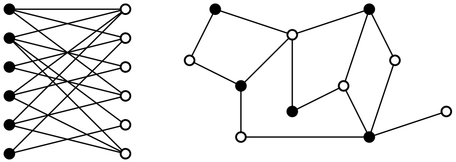
グラフ $G = (V, E)$

定義：二部グラフとは？

G が**二部グラフ**であるとは，

- 頂点集合 V を 2 つの集合 A, B に分割できて
- どの辺 $e \in E$ も一端点を A に持ち，もう一端点を B に持つもの

二部グラフの例



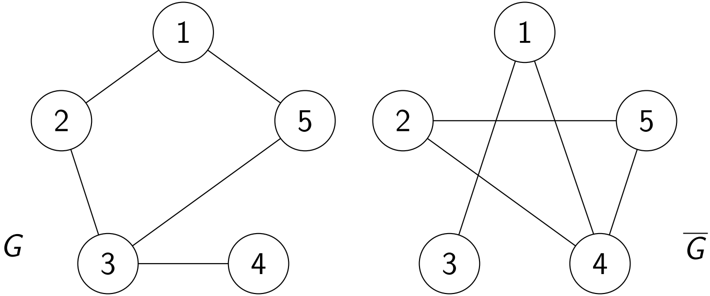
このような分割を持つとき，二部グラフを $G = (A, B; E)$ と表記することがある．

グラフ $G = (V, E)$

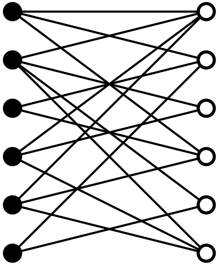
定義：補グラフとは？

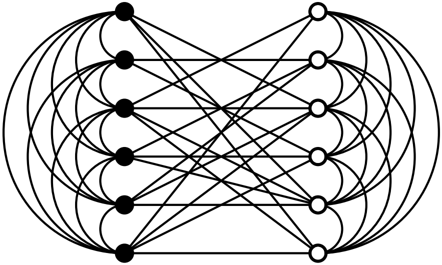
G の補グラフ $\overline{G}$ とは次のようなグラフ

- 頂点集合：V
- 辺集合：$\{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v, \{u, v\} \notin E\}$



二部グラフ $G = (A, B; E)$ の補グラフ $\overline{G}$ において，A, B はクリーク





性質

二部グラフの補グラフの誘導部分グラフも二部グラフの補グラフ

二部グラフの補グラフが理想グラフであることの証明

グラフ $G = (V, E)$

1. $\omega(\overline{G}) = \alpha(G)$
2. $\alpha(G) = |V| - \tau(G)$
3. G が二部グラフ $\Rightarrow \chi(\overline{G}) = |V| - \nu(G)$
4. G が二部グラフ $\Rightarrow \tau(G) = \nu(G)$ (Kőnig–Egerváry の定理)

$\therefore$ G が二部グラフ $\Rightarrow \chi(\overline{G}) = \omega(\overline{G})$

二部グラフの補グラフが理想グラフであることの証明

グラフ $G = (V, E)$

1. $\omega(\overline{G}) = \alpha(G)$
2. $\alpha(G) = |V| - \tau(G)$
3. G が二部グラフ $\Rightarrow \chi(\overline{G}) = |V| - \nu(G)$
4. G が二部グラフ $\Rightarrow \tau(G) = \nu(G)$　　(Kőnig–Egerváry の定理)

$\therefore$ G が二部グラフ $\Rightarrow \chi(\overline{G}) = \omega(\overline{G})$

グラフの不変量

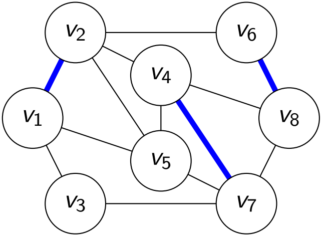
- $\chi(G)$: 染色数
- $\omega(G)$: クリーク数
- $\alpha(G)$: 独立数
- $\tau(G)$: 頂点被覆数
- $\nu(G)$: マッチング数

目次

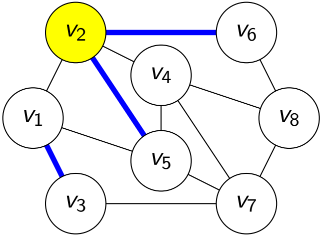
グラフ $G = (V, E)$

定義：マッチングとは？

G の**マッチング**とは辺部分集合 $M \subseteq E$ で，
M のどの 2 辺も同じ頂点に接続しないもの



$\{\{v_1, v_2\}, \{v_4, v_7\}, \{v_6, v_8\}\}$ は
マッチングである



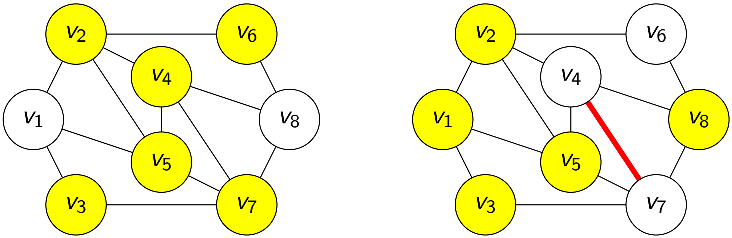
$\{\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_6\}\}$ は
マッチングではない

マッチングの辺 $e \in M$ は e の端点を**飽和**する

グラフ $G = (V, E)$

定義：頂点被覆とは？

G の頂点被覆とは頂点部分集合 $C \subseteq V$ で，
G のどの辺もある C の頂点に接続しているもの



$\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ は
頂点被覆である

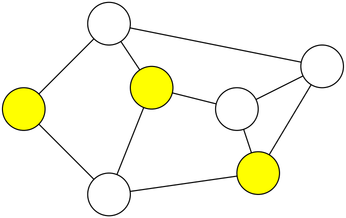
$\{v_1, v_2, v_3, v_5, v_8\}$ は
頂点被覆ではない

頂点被覆の頂点は，それに接続する辺を覆う (被覆する)

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：独立集合とは？

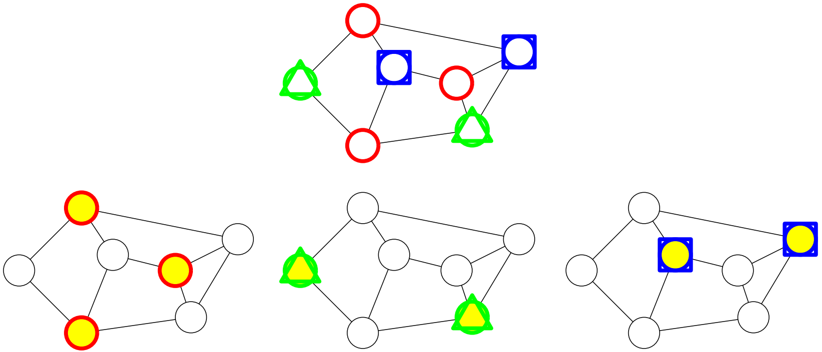
G の独立集合とは，頂点部分集合 $I \subseteq V$ で，
任意の異なる 2 頂点 $u, v \in I$ に対して $\{u, v\} \notin E$



グラフ $G = (V, E)$

- $\nu(G) =$ G のマッチングの最大要素数 (辺数) (マッチング数)
- $\tau(G) =$ G の頂点被覆の最小要素数 (頂点数) (頂点被覆数)
- $\alpha(G) =$ G の独立集合の最大要素数 (頂点数) (独立数)

彩色クラスと独立集合



彩色の彩色クラスは独立集合

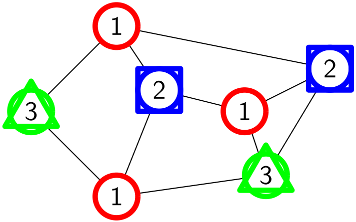
(互いに隣接していない頂点から成る部分集合)

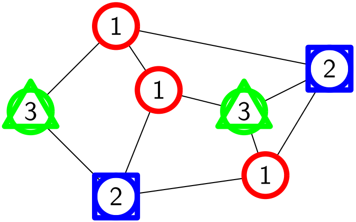
グラフ $G = (V, E)$，自然数 k

定義：彩色とは？ (独立集合を用いた定義)

G の k 彩色とは，
k 個の独立集合 $I_1, \ldots, I_k$ への頂点集合 V の分割

- $V = I_1 \cup \cdots \cup I_k$
- 任意の $i \neq j \in \{1, \ldots, k\}$ に対して，$I_i \cap I_j = \emptyset$





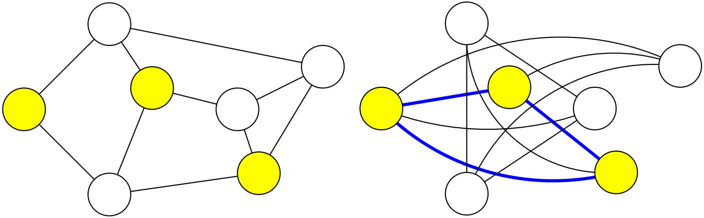
3 彩色である

3 彩色ではない

グラフ $G = (V, E)$, $X \subseteq V$

性質：独立集合とクリークの関係

X が G の独立集合 $\Leftrightarrow$ X が $\overline{G}$ のクリーク



その系 (Corollary)

1. $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$

独立集合とクリークの関係：証明

グラフ $G = (V, E)$，$X \subseteq V$

性質：独立集合とクリークの関係

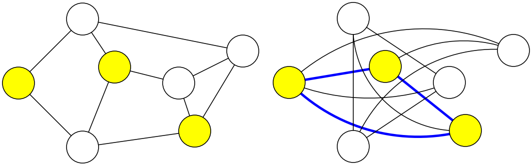
X が G の独立集合 $\Leftrightarrow$ X が $\overline{G}$ のクリーク

証明：G において，X が独立集合である

$\Leftrightarrow$ G において，X のどの 2 頂点も隣接しない

$\Leftrightarrow$ $\overline{G}$ において，X のどの 2 頂点も隣接する　　(補グラフの定義)

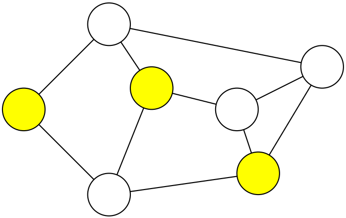
$\Leftrightarrow$ $\overline{G}$ において，X はクリーク　$\square$



グラフ $G = (V, E)$，$X \subseteq V$

性質：頂点被覆と独立集合の関係

X が G の独立集合 $\Leftrightarrow$ $V - X$ が G の頂点被覆



その系 (Corollary)

2 $\alpha(G) = |V| - \tau(G)$

グラフ $G = (V, E)$，$X \subseteq V$

性質：頂点被覆と独立集合の関係

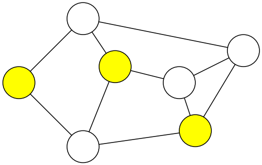
X が G の独立集合 $\Leftrightarrow$ $V - X$ が G の頂点被覆

証明：G において，X が独立集合である

$\Leftrightarrow$ G において，X の頂点どうしを結ぶ辺は存在しない

$\Leftrightarrow$ G において，どの辺も $V - X$ の頂点を端点に持つ

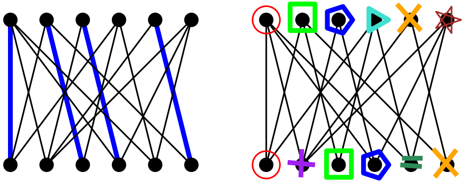
$\Leftrightarrow$ G において，$V - X$ は頂点被覆である $\square$



二部グラフ $G = (A, B; E)$，$M \subseteq E$

性質：二部グラフにおけるマッチングと補グラフの彩色の関係

- M が G のマッチング $\Rightarrow$ $\overline{G}$ は $|A| + |B| - |M|$ 彩色可能
- $\overline{G}$ が $|A| + |B| - m$ 彩色可能 $\Rightarrow$ G は要素数 m のマッチングを持つ



その系

3. G が二部グラフ $\Rightarrow \chi(\overline{G}) = |A| + |B| - \nu(G)$

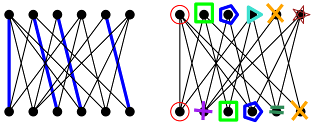
二部グラフ $G = (A, B; E)$, $M \subseteq E$

性質：二部グラフにおけるマッチングと補グラフの彩色の関係

M が G のマッチング $\Rightarrow$ $\overline{G}$ は $|A| + |B| - |M|$ 彩色可能

証明 $(\Rightarrow)$：M が G のマッチングであると仮定

- $\therefore$ M の各辺は G の要素数 2 のクリークで，互いに頂点を共有しない
- $\therefore$ M の各辺は $\overline{G}$ の要素数 2 の独立集合で互いに頂点を共有しない
- $\therefore$ $\overline{G}$ は $|A| + |B| - |M|$ 個の独立集合に分割可能
- $\therefore$ $\overline{G}$ は $|A| + |B| - |M|$ 彩色可能 □



二部グラフ $G = (A, B; E)$，$M \subseteq E$

性質：二部グラフにおけるマッチングと補グラフの彩色の関係

$\overline{G}$ が $|A| + |B| - m$ 彩色可能 $\Rightarrow$ G は要素数 m のマッチングを持つ

証明：$\overline{G}$ が $|A| + |B| - m$ 彩色可能であると仮定

- $\therefore$ $\overline{G}$ は $|A| + |B| - m$ 個の独立集合に分割可能
- $\therefore$ G は $|A| + |B| - m$ 個のクリークに分割可能
- G は二部グラフなので，クリークの要素数は高々2 (c.f. 前回の内容)
- $\therefore$ G は次のようなクリークに分割可能
  - 要素数 1 のクリーク $|A| + |B| - 2m$ 個
  - 要素数 2 のクリーク m 個
- $\therefore$ G は要素数 m のマッチングを持つ $\square$

目次

二部グラフの補グラフが理想グラフであることの証明

グラフ $G = (V, E)$

1. $\omega(\overline{G}) = \alpha(G)$
2. $\alpha(G) = |V| - \tau(G)$
3. G が二部グラフ $\Rightarrow \chi(\overline{G}) = |V| - \nu(G)$
4. G が二部グラフ $\Rightarrow \tau(G) = \nu(G)$ (Kőnig–Egerváry の定理)

$\therefore$ G が二部グラフ $\Rightarrow \chi(\overline{G}) = \omega(\overline{G})$

グラフの不変量

- $\chi(G)$：染色数
- $\omega(G)$：クリーク数
- $\alpha(G)$：独立数
- $\tau(G)$：頂点被覆数
- $\nu(G)$：マッチング数

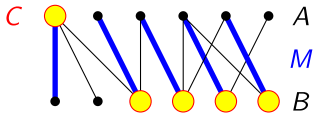
Kőnig–Egerváry の定理 (1931)

二部グラフ $G = (A, B; E)$

性質：二部グラフにおけるマッチングと頂点被覆の関係

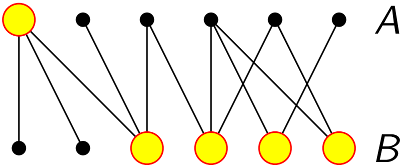
マッチング数 $\nu(G)$ と頂点被覆数 $\tau(G)$ は等しい

例：M が最大マッチング，C が最小頂点被覆で，$|M| = |C|$

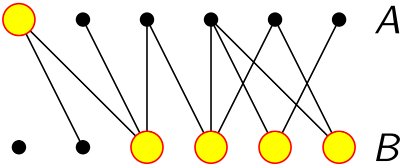


今から紹介する証明は Lovász ('75) によるもの

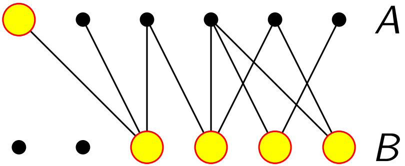
- まず，$\tau(G) \geq \nu(G)$ が成り立つ (演習問題)
- つまり，$\tau(G) \leq \nu(G)$ を証明すればよい
- $\tau = \tau(G)$ とする
- G から辺を除去し続けて，次を満たすグラフ G' を作る
  - $\tau(G') = \tau$
  - G' の任意の辺 e に対して，$\tau(G' - e) < \tau$



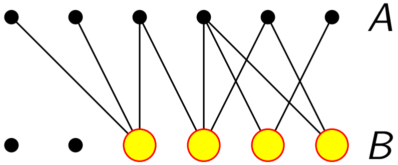
- まず，$\tau(G) \geq \nu(G)$ が成り立つ (演習問題)
- つまり，$\tau(G) \leq \nu(G)$ を証明すればよい
- $\tau = \tau(G)$ とする
- G から辺を除去し続けて，次を満たすグラフ G' を作る
  - $\tau(G') = \tau$
  - G' の任意の辺 e に対して，$\tau(G' - e) < \tau$



- まず，$\tau(G) \geq \nu(G)$ が成り立つ (演習問題)
- つまり，$\tau(G) \leq \nu(G)$ を証明すればよい
- $\tau = \tau(G)$ とする
- G から辺を除去し続けて，次を満たすグラフ G' を作る
  - $\tau(G') = \tau$
  - G' の任意の辺 e に対して，$\tau(G' - e) < \tau$

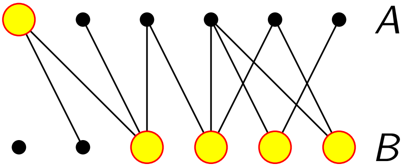


- まず，$\tau(G) \geq \nu(G)$ が成り立つ (演習問題)
- つまり，$\tau(G) \leq \nu(G)$ を証明すればよい
- $\tau = \tau(G)$ とする
- G から辺を除去し続けて，次を満たすグラフ G' を作る
  - $\tau(G') = \tau$
  - G' の任意の辺 e に対して，$\tau(G' - e) < \tau$

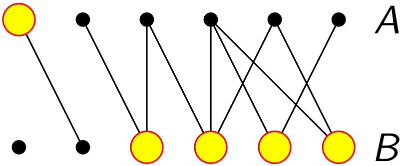


Kőnig–Egerváry の定理：証明 (1)

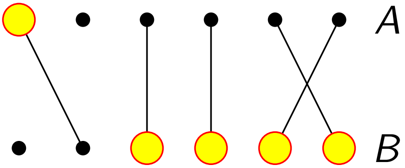
- まず，$\tau(G) \geq \nu(G)$ が成り立つ (演習問題)
- つまり，$\tau(G) \leq \nu(G)$ を証明すればよい
- $\tau = \tau(G)$ とする
- G から辺を除去し続けて，次を満たすグラフ G' を作る
  - $\tau(G') = \tau$
  - G' の任意の辺 e に対して，$\tau(G' - e) < \tau$



- まず，$\tau(G) \geq \nu(G)$ が成り立つ (演習問題)
- つまり，$\tau(G) \leq \nu(G)$ を証明すればよい
- $\tau = \tau(G)$ とする
- G から辺を除去し続けて，次を満たすグラフ G' を作る
  - $\tau(G') = \tau$
  - G' の任意の辺 e に対して，$\tau(G' - e) < \tau$



- まず，$\tau(G) \geq \nu(G)$ が成り立つ (演習問題)
- つまり，$\tau(G) \leq \nu(G)$ を証明すればよい
- $\tau = \tau(G)$ とする
- G から辺を除去し続けて，次を満たすグラフ G' を作る
  - $\tau(G') = \tau$
  - G' の任意の辺 e に対して，$\tau(G' - e) < \tau$



主張 (Claim)

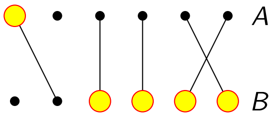
G' の最大次数は 1

- 主張が正しいとすると，

$$\tau(G) = \tau = \tau(G') = \nu(G') \le \nu(G)$$

となり，定理の証明が終わる

- あとは，主張を証明すればよい

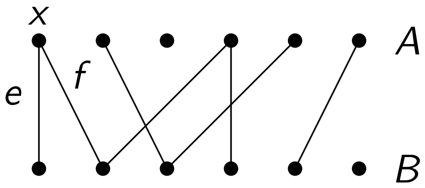


主張 (Claim)

G' の最大次数は 1

<u>主張の証明</u>：G' の最大次数が 2 以上だとする

- G' の辺 e, f が同じ頂点 x を端点として持つと仮定
- $G' - e$ において，$\tau(G' - e) < \tau$ が成立
- S_e を $G' - e$ の最小頂点被覆とすると，$|S_e| = \tau(G' - e) = \tau - 1$

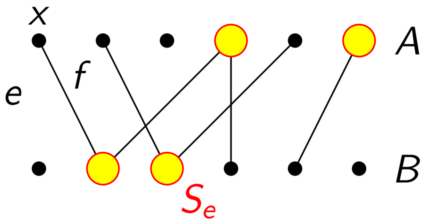


主張 (Claim)

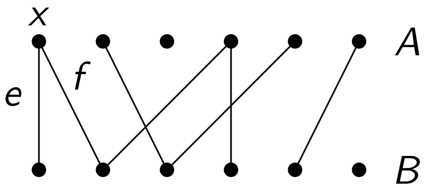
G' の最大次数は 1

主張の証明：G' の最大次数が 2 以上だとする

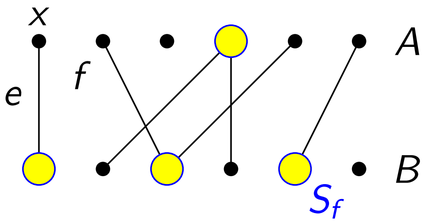
- G' の辺 e, f が同じ頂点 x を端点として持つと仮定
- $G' - e$ において，$\tau(G' - e) < \tau$ が成立
- S_e を $G' - e$ の最小頂点被覆とすると，$|S_e| = \tau(G' - e) = \tau - 1$



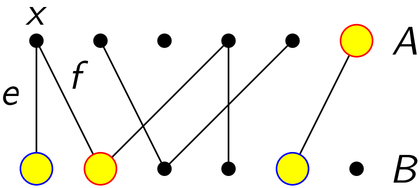
- 同様に，$G' - f$ において，$\tau(G' - f) < \tau$ が成立
- S_f を $G' - f$ の最小頂点被覆とすると，$|S_f| = \tau(G' - f) = \tau - 1$
- 注：e の端点は S_e に含まれず，f の端点は S_f に含まれない (なぜ？)



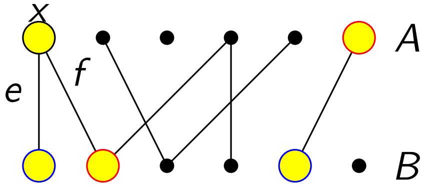
- 同様に，$G' - f$ において，$\tau(G' - f) < \tau$ が成立
- S_f を $G' - f$ の最小頂点被覆とすると，$|S_f| = \tau(G' - f) = \tau - 1$
- 注：e の端点は S_e に含まれず，f の端点は S_f に含まれない (なぜ？)



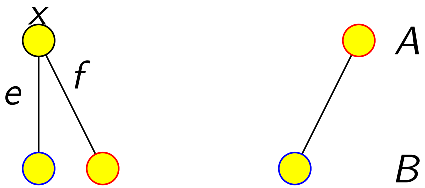
- $G'' = G'[(S_e \triangle S_f) \cup \{x\}]$ とする
- $t = |S_e \cap S_f|$ とする
- このとき，G'' の頂点数 $= 2(\tau - 1 - t) + 1$
- G'' は二部グラフなので，
  G'' の頂点被覆 T で頂点数 $\tau - 1 - t$ 以下のものが存在
  (彩色クラスの小さい方を取ればよい)



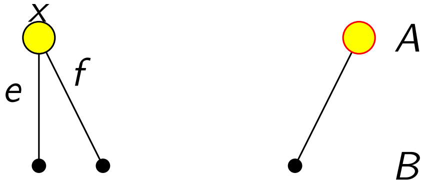
- $G'' = G'[(S_e \triangle S_f) \cup \{x\}]$ とする
- $t = |S_e \cap S_f|$ とする
- このとき，G'' の頂点数 $= 2(\tau - 1 - t) + 1$
- G'' は二部グラフなので，
  G'' の頂点被覆 T で頂点数 $\tau - 1 - t$ 以下のものが存在
  (彩色クラスの小さい方を取ればよい)



- $G'' = G'[(S_e \triangle S_f) \cup \{x\}]$ とする
- $t = |S_e \cap S_f|$ とする
- このとき，G'' の頂点数 $= 2(\tau - 1 - t) + 1$
- G'' は二部グラフなので，
  G'' の頂点被覆 T で頂点数 $\tau - 1 - t$ 以下のものが存在
  (彩色クラスの小さい方を取ればよい)



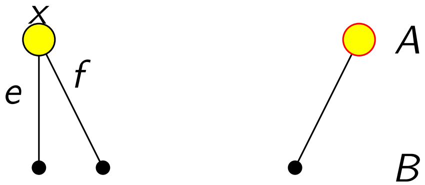
- $G'' = G'[(S_e \triangle S_f) \cup \{x\}]$ とする
- $t = |S_e \cap S_f|$ とする
- このとき，G'' の頂点数 $= 2(\tau - 1 - t) + 1$
- G'' は二部グラフなので，
  G'' の頂点被覆 T で頂点数 $\tau - 1 - t$ 以下のものが存在
  (彩色クラスの小さい方を取ればよい)



- このとき，$T' = T \cup (S_e \cap S_f)$ は G' の頂点被覆である (なぜ？)
  - e, f 以外の辺は S_e か S_f が被覆する
  - e, f は x か，そうでなければ，x ではない e, f の端点が被覆する
- したがって，

$$\begin{aligned}\tau(G') &\leq |T'| = |T \cup (S_e \cap S_f)| \\ &= |T| + |S_e \cap S_f| \leq (\tau(G') - 1 + t) + t = \tau(G') - 1\end{aligned}$$

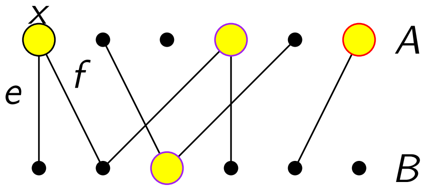
となり，矛盾
- つまり，G' の最大次数は 1 □



- このとき，$T' = T \cup (S_e \cap S_f)$ は G' の頂点被覆である (なぜ？)
  - e, f 以外の辺は S_e か S_f が被覆する
  - e, f は x か，そうでなければ，x ではない e, f の端点が被覆する
- したがって，

$$\begin{aligned}\tau(G') &\leq |T'| = |T \cup (S_e \cap S_f)| \\ &= |T| + |S_e \cap S_f| \leq (\tau(G') - 1 + t) + t = \tau(G') - 1\end{aligned}$$

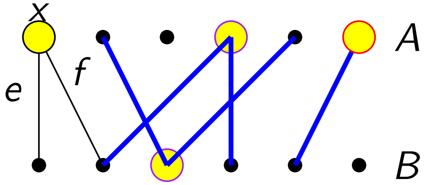
  となり，矛盾
- つまり，G' の最大次数は 1 □



- このとき，$T' = T \cup (S_e \cap S_f)$ は G' の頂点被覆である (なぜ？)
  - e, f 以外の辺は S_e か S_f が被覆する
  - e, f は x か，そうでなければ，x ではない e, f の端点が被覆する
- したがって，

$$\begin{aligned}\tau(G') &\leq |T'| = |T \cup (S_e \cap S_f)| \\ &= |T| + |S_e \cap S_f| \leq (\tau(G') - 1 + t) + t = \tau(G') - 1\end{aligned}$$

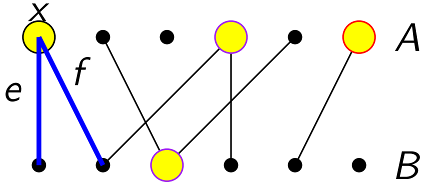
  となり，矛盾
- つまり，G' の最大次数は 1 □



- このとき，$T' = T \cup (S_e \cap S_f)$ は G' の頂点被覆である (なぜ？)
  - e, f 以外の辺は S_e か S_f が被覆する
  - e, f は x か，そうでなければ，x ではない e, f の端点が被覆する
- したがって，

$$\begin{aligned}\tau(G') &\leq |T'| = |T \cup (S_e \cap S_f)| \\ &= |T| + |S_e \cap S_f| \leq (\tau(G') - 1 + t) + t = \tau(G') - 1\end{aligned}$$

  となり，矛盾
- つまり，G' の最大次数は 1 $\square$



目次

演習問題

二部グラフの線グラフの補グラフは理想グラフ

証明の流れ

二部グラフ G

1. $\chi(\overline{L(G)}) = \tau(G)$
2. $\omega(\overline{L(G)}) = \nu(G)$
3. $\tau(G) = \nu(G)$ (Kőnig–Egerváry の定理)

目次

今日のまとめ

前回の内容

代表的な理想グラフの紹介

- 二部グラフ (簡単)
- 二部グラフの線グラフ (Kőnig の定理)

今日の内容

代表的な理想グラフの紹介

- 二部グラフの補グラフ (Kőnig–Egerváry の定理)
- 二部グラフの線グラフの補グラフ (演習問題)

次回予告

代表的な理想グラフの紹介

- 区間グラフ
- 弦グラフ

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK