離散最適化基礎論　第 1 回
理想グラフと組合せ最適化

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2018 年 10 月 5 日

最終更新：2018 年 10 月 12 日　05:01

概要

主題

離散最適化のトピックの１つとして理想グラフを取り上げ，
その数理的側面と計算的側面の双方を意識して講義する

なぜ講義で取り扱う？

- 重要な概念であるから
- 組合せ最適化の様々な技法を紹介できるから

重要なメッセージ

「連続最適化」と「離散最適化」という分類の無意味さ

スケジュール 前半 (予定)

1. 理想グラフと組合せ最適化 (10/5)
2. 代表的な理想グラフ (1)：二部グラフと二部グラフの線グラフ (10/12)
3. 代表的な理想グラフ (2)：二部グラフの補グラフ (10/19)
4. 代表的な理想グラフ (3)：区間グラフと弦グラフ (10/26)

★ 出張のため休講 (11/2)

5. 弱理想グラフ定理 (1)：グラフ理論的手法 (11/9)
6. 組合せ最適化と線形計画法 (11/16)

★ 調布祭 のため 休み (11/23)

7. 凸多面体の基礎 (11/30)
8. 弱理想グラフ定理 (2)：多面体的手法 (12/7)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

9. 楕円体法 (1)：基礎 (12/14)
10. 楕円体法 (2)：アルゴリズム (12/21)
11. 組合せ最適化と半正定値計画法 (1/11)
- ⋆ センター試験準備 のため 休み (1/18)
12. グラフのシャノン容量 (1/25)
13. 理想グラフに対するアルゴリズム (2/1)
14. 予備？ (2/8)
- ⋆ 期末試験 (2/15？)

注意：予定の変更もありうる

情報

教員

- 岡本 吉央 (おかもと よしお)
- 居室：西 4 号館 2 階 206 号室
- E-mail：okamotoy@uec.ac.jp
- Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/

講義資料

- Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2018/perfect/
- 注意：資料の印刷等は各学生が自ら行う
- 講義当日の昼 12 時までに，ここに置かれる
- Twitter (@okamoto7yoshio)：置かれたことを知らせる tweet

http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2018/perfect/

- スライド
- 印刷用スライド：8 枚のスライドを 1 ページに収めたもの
- 演習問題

「印刷用スライド」と「演習問題」は各自印刷して持参すると便利

授業の進め方

講義 (80 分)

- スライドと板書で進める
- スライドのコピーに重要事項のメモを取る

演習 (10 分)

- 演習問題に取り組む
- 不明な点は教員に質問する

退室 (0 分) ←重要

- コメント (授業の感想，質問など) を紙に書いて提出する (匿名可)
- コメントとそれに対する回答は (匿名で) 講義ページに掲載される

オフィスアワー：金曜 5 限 (岡本居室)

- 質問など
- ただし，いないときもあるので注意 (注意：情報数理工学セミナー)

演習問題

演習問題の進め方

- 授業のおわり 10 分は演習問題を解く時間
- 残った演習問題は復習・試験対策用
- 注意：「模範解答」のようなものは存在しない

演習問題の種類

- 復習問題：講義で取り上げた内容を反復
- 補足問題：講義で省略した内容を補足
- 追加問題：講義の内容に追加
- 発展問題：少し難しい (かもしれない)

レポートの提出

- 演習問題の答案をレポートとして提出してもよい
- レポートには提出締切がある (各回にて指定)
- レポートは採点されない (成績に勘案されない)
- レポートにはコメントがつけられて，返却される
  - 返却された内容については，再提出ができる (再提出締切は原則なし)
  - 再提出には最初に提出したレポートも添付する

評価

期末試験のみによる

- 出題形式
  - 演習問題と同じ形式の問題を 6 題出題する
  - その中の 3 題以上は演習問題として提示されたものと同一である (ただし,「発展」として提示された演習問題は出題されない)
  - 全問に解答する
- 配点：1 題 20 点満点，計 120 点満点
- 成績において，100 点以上は 100 点で打ち切り
- 時間：90 分 (おそらく)
- 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

教科書

- 指定しない

全般的な参考書

- L. Lovász, An Algorithmic Theory of Numbers, Graphs and Convexity, SIAM, 1986.
- M. Grötschel, L. Lovász, A. Schrijver, Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization, Springer, 1988.
- B. Korte, J. Vygen, Combinatorial Optimization, 6th Edition, Springer, 2018.
- R. Diestel, Graph Theory, 5th Edition, Springer 2016.

その他，研究論文

- 私語はしない (ただし，演習時間の相談は積極的に OK)
- 携帯電話はマナーモードにする
- この講義と関係のないことを (主に電子機器で) しない
- 音を立てて睡眠しない

約束が守られない場合は退席してもらう場合あり

目次

William R. Pulleyblank

https://www.usma.edu/nsc/sitepages/william pulleyblank.aspx

Plenary talk at the ISMP2000 conference, Atlanta, August 7–11, 2000

(1) Euler's Theorem 1736
(2) Max-Flow Min-Cut Theorem 1956
(3) Nonbipartite Matching and Polyhedral Characterization 1965
(4) Matroid Intersection Theorem 1970
(5) Cook's Theorem 1971
(6) Dantzig-Fulkerson-Johnson's Solution of 49 City Problem 1954
(6) Held-Karp's Subgradient Relaxation of TSP 1970, 1971
(7) Lin-Kernighan Algorithm 1973
(8) Optimization $=$ Separation 1980, 1981
(9) Shannon Capacity of the Pentagon is $\sqrt{5}$ 1979
(10) .878 Approximation Algorithm for the Max Cut Problem 1994

Plenary talk at the ISMP2000 conference, Atlanta, August 7–11, 2000

(1) Euler's Theorem 1736
(2) Max-Flow Min-Cut Theorem 1956
(3) Nonbipartite Matching and Polyhedral Characterization 1965
(4) Matroid Intersection Theorem 1970
(5) Cook's Theorem 1971
(6) Dantzig-Fulkerson-Johnson's Solution of 49 City Problem 1954
(6) Held-Karp's Subgradient Relaxation of TSP 1970, 1971
(7) Lin-Kernighan Algorithm 1973
(8) Optimization $=$ Separation 1980, 1981
(9) Shannon Capacity of the Pentagon is $\sqrt{5}$ 1979
(10) .878 Approximation Algorithm for the Max Cut Problem 1994

「グラフとネットワーク」で扱う (扱った)

Plenary talk at the ISMP2000 conference, Atlanta, August 7–11, 2000

(1) Euler's Theorem 1736
(2) Max-Flow Min-Cut Theorem 1956
(3) Nonbipartite Matching and Polyhedral Characterization 1965
(4) Matroid Intersection Theorem 1970
(5) Cook's Theorem 1971
(6) Dantzig-Fulkerson-Johnson's Solution of 49 City Problem 1954
(6) Held-Karp's Subgradient Relaxation of TSP 1970, 1971
(7) Lin-Kernighan Algorithm 1973
(8) Optimization $=$ Separation 1980, 1981
(9) Shannon Capacity of the Pentagon is $\sqrt{5}$ 1979
(10) .878 Approximation Algorithm for the Max Cut Problem 1994

「計算理論」で扱う (扱った)

Plenary talk at the ISMP2000 conference, Atlanta, August 7–11, 2000

(1) Euler's Theorem 1736
(2) Max-Flow Min-Cut Theorem 1956
(3) Nonbipartite Matching and Polyhedral Characterization 1965
(4) Matroid Intersection Theorem 1970
(5) Cook's Theorem 1971
(6) Dantzig-Fulkerson-Johnson's Solution of 49 City Problem 1954
(6) Held-Karp's Subgradient Relaxation of TSP 1970, 1971
(7) Lin-Kernighan Algorithm 1973
(8) Optimization = Separation 1980, 1981
(9) Shannon Capacity of the Pentagon is $\sqrt{5}$ 1979
(10) .878 Approximation Algorithm for the Max Cut Problem 1994

「離散最適化基礎論」(2014 年度) で扱う予定だった (が扱えなかった)

Plenary talk at the ISMP2000 conference, Atlanta, August 7–11, 2000

(1) Euler's Theorem 1736
(2) Max-Flow Min-Cut Theorem 1956
(3) Nonbipartite Matching and Polyhedral Characterization 1965
(4) Matroid Intersection Theorem 1970
(5) Cook's Theorem 1971
(6) Dantzig-Fulkerson-Johnson's Solution of 49 City Problem 1954
(6) Held-Karp's Subgradient Relaxation of TSP 1970, 1971
(7) Lin-Kernighan Algorithm 1973
(8) Optimization $=$ Separation 1980, 1981
(9) Shannon Capacity of the Pentagon is $\sqrt{5}$ 1979
(10) .878 Approximation Algorithm for the Max Cut Problem 1994

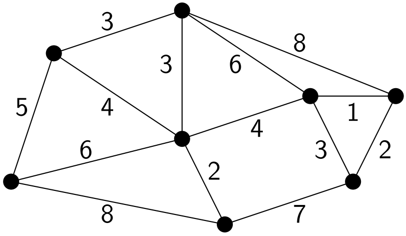
「離散最適化基礎論」(2015 年度) で扱った

Plenary talk at the ISMP2000 conference, Atlanta, August 7–11, 2000

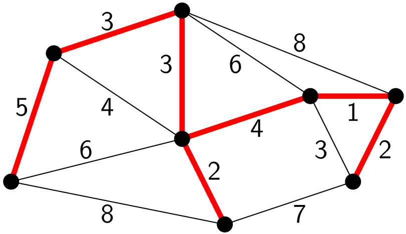
(1) Euler's Theorem 1736
(2) Max-Flow Min-Cut Theorem 1956
(3) Nonbipartite Matching and Polyhedral Characterization 1965
(4) Matroid Intersection Theorem 1970
(5) Cook's Theorem 1971
(6) Dantzig-Fulkerson-Johnson's Solution of 49 City Problem 1954
(6) Held-Karp's Subgradient Relaxation of TSP 1970, 1971
(7) Lin-Kernighan Algorithm 1973
(8) Optimization = Separation 1980, 1981
(9) Shannon Capacity of the Pentagon is $\sqrt{5}$ 1979
(10) .878 Approximation Algorithm for the Max Cut Problem 1994

「離散最適化基礎論」(2018 年度) で扱う (予定)

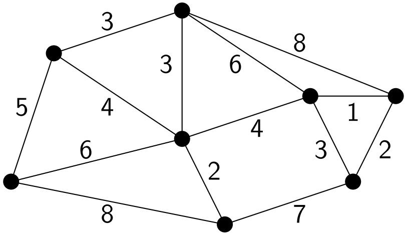
最小全域木問題：すべての頂点間に経路が存在するような
重み和最小のネットワークを作る



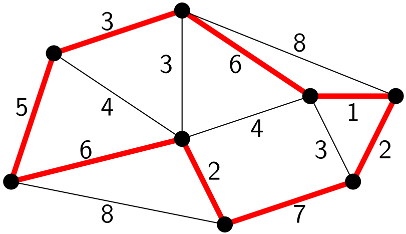
最小全域木問題：すべての頂点間に経路が存在するような
重み和最小のネットワークを作る



巡回セールスマン問題：すべての頂点をちょうど一度ずつ通るような
重み和最小の巡回路を作る



巡回セールスマン問題：すべての頂点をちょうど一度ずつ通るような重み和最小の巡回路を作る



離散最適化問題の解きやすさ と 解きにくさ

解きやすい問題

- 最小全域木問題
- 最大マッチング問題
- 最小カット問題
- ...

解きにくい問題

- 巡回セールスマン問題
- 最小頂点被覆問題
- 最小彩色問題
- ...

「解きやすい」とは

多項式時間解法が存在する

(参考：アルゴリズム論第一・第二)

「解きにくい」とは

NP 困難性が証明されている

(参考：計算理論)

離散最適化問題の解きやすさ と 解きにくさ

解きやすい問題

- 最小全域木問題
- 最大マッチング問題
- 最小カット問題
- ...

解きにくい問題

- 巡回セールスマン問題
- 最小頂点被覆問題
- 最小彩色問題
- ...

「解きやすい」とは

多項式時間解法が存在する

(参考：アルゴリズム論第一・第二)

「解きにくい」とは

NP 困難性が証明されている

(参考：計算理論)

困ったこと

世の中の「ほとんど」の問題は NP 困難

$\rightsquigarrow$ しかし，いろいろな問題は実際に解けている

理解したいこと

なぜ,「現実問題」は解きやすいのか？

回答

よくわからない

離散最適化問題の解きやすさ と 解きにくさ

理解したいこと

なぜ,「現実問題」は解きやすいのか？

回答

よくわからない

しかし，部分的な回答はある

部分的な回答

「現実問題」は「特殊な構造」を持っているから

ポイント

効率的アルゴリズムが設計できる背景に「美しい数理構造」がある

この講義では，その一端に触れたい

最適化における「美しい数理構造」と言えば？

- 双対定理
- 凸集合の幾何学

もっとも顕著で，もっとも基本的な例

- 線形計画法

進んだ例

- 理想グラフの染色数とクリーク数

目次

無向グラフとは？

無向グラフとは，順序対 (V, E) で，
- V は集合
- E は V の 要素数 2 の部分集合の集合

であるもののこと

例：
- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$

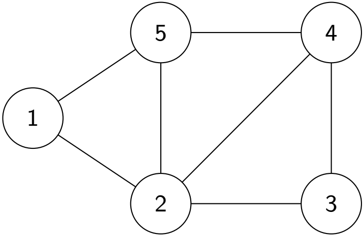
注意

$\{2, 5\} = \{5, 2\}$ (集合では順序を不問)

今後，無向グラフのことを単に「グラフ」と呼ぶ

無向グラフの図示

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$

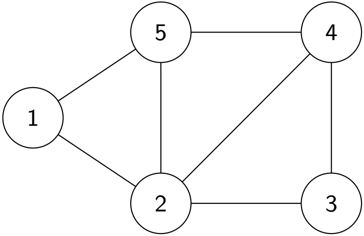


グラフ $G = (V, E)$

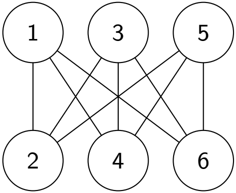
グラフの用語

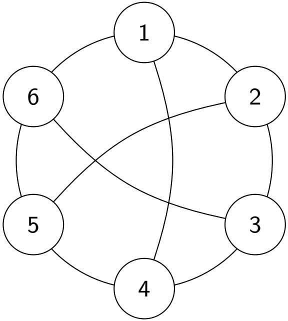
- V の要素を G の頂点と呼ぶ
- E の要素を G の辺と呼ぶ
- V を G の頂点集合と呼ぶ
- E を G の辺集合と呼ぶ
- 辺 $\{u, v\} \in E$ に対して，u, v をその端点と呼ぶ
- 頂点 v が辺 e の端点であるとき，v は e に接続するという
- 頂点 u と v が辺を成すとき，u と v は隣接するという

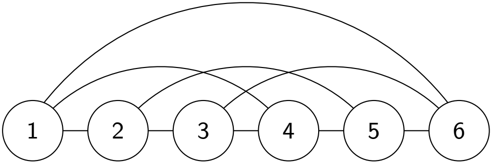
- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\},$
  $\{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$
- 頂点 $2, 3$ は辺 $\{2, 3\}$ の端点
- 頂点 2 は辺 $\{2, 3\}$ に接続する
- 頂点 2 と頂点 3 は隣接する



1 つのグラフに対するいろいろな図示





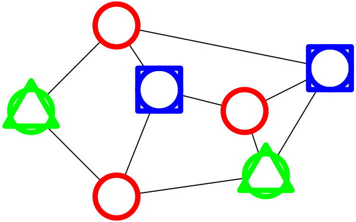


グラフの彩色

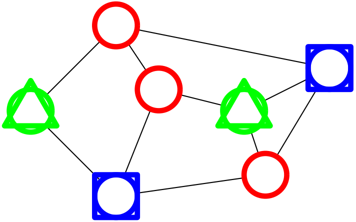
グラフ $G = (V, E)$

定義：彩色とは？(直感的な定義)

G の彩色 (さいしょく) とは，
G の頂点への色の割当で，各辺の両端点の色が異なるもの



彩色である



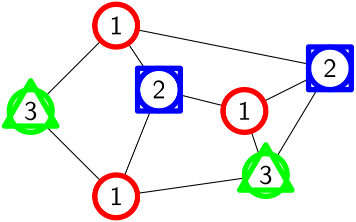
彩色ではない

彩色において，同じ色を持つ頂点の集合を彩色クラスとも呼ぶ

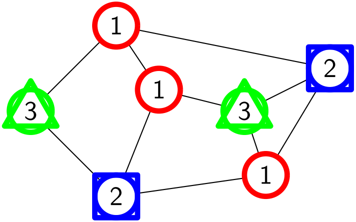
グラフ $G = (V, E)$，自然数 k

定義：彩色とは？ (形式的な定義)

G の k 彩色とは，写像 $c \colon V \to \{1, \ldots, k\}$ で，
任意の辺 $\{u, v\} \in E$ に対して $c(u) \neq c(v)$ を満たすもの



3 彩色である



3 彩色ではない

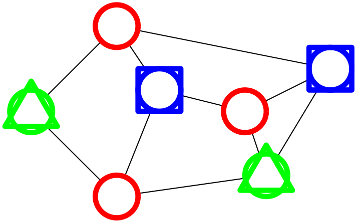
c の終域 $\{1, \ldots, k\}$ をパレットと呼ぶことがある

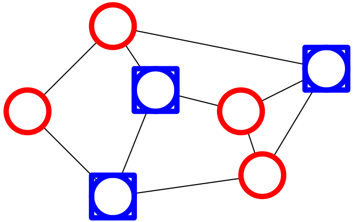
グラフ $G = (V, E)$，自然数 k

定義：彩色可能性とは？

G が k 彩色可能であるとは，G の k 彩色が存在すること

このグラフは 3 彩色可能である





3 彩色である　　　　2 彩色は存在しない

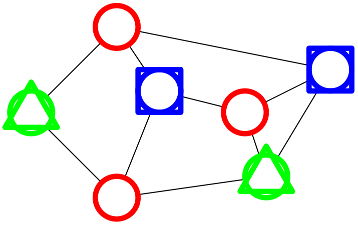
注：G が k 彩色可能 $\Rightarrow$ G は $k+1$ 彩色可能

グラフ $G = (V, E)$

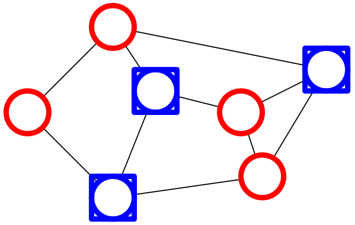
定義：染色数とは？

G の染色数とは，G の k 彩色が存在するような最小の k

G の染色数を $\chi(G)$ で表す



3 彩色である

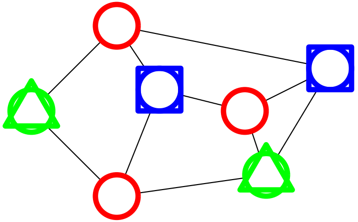


2 彩色は存在しない

$\therefore$ このグラフの染色数は 3

定義：染色数とは？ (再掲)

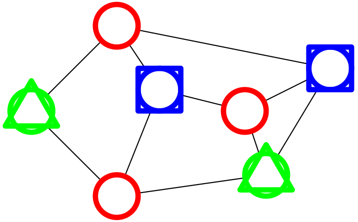
グラフ G の染色数とは，G の k 彩色が存在するような最小の k



$$\chi(G) = 3$$

定義：染色数とは？ (再掲)

グラフ G の染色数とは，G の k 彩色が存在するような最小の k



疑問

- 3 色未満で塗れないのか？
- 塗れないことをどう示すのか？

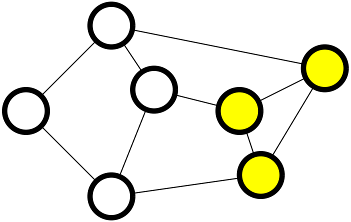
$\leftarrow \chi(G) \leq 3$ しか示してない

$\chi(G) = 3$???

定義：グラフのクリークとは？

グラフ G のクリークとは，頂点部分集合 C で，
その中のどの 2 頂点も辺で結ばれているもの

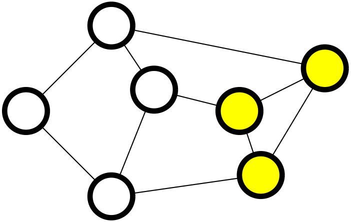
クリークの頂点数の最大値を $\omega(G)$ で表す (G のクリーク数と呼ぶ)



定義：グラフのクリークとは？

グラフ G のクリークとは，頂点部分集合 C で，
その中のどの 2 頂点も辺で結ばれているもの

クリークの頂点数の最大値を $\omega(G)$ で表す (G のクリーク数と呼ぶ)



観察 (弱双対性)

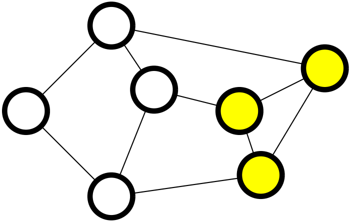
- C が G のクリークである
  $\Rightarrow \chi(G) \geq |C|$

なぜか？

定義：グラフのクリークとは？

グラフ G の**クリーク**とは，頂点部分集合 C で，
その中のどの 2 頂点も辺で結ばれているもの

クリークの頂点数の最大値を $\omega(G)$ で表す (G の**クリーク数**と呼ぶ)



観察 (弱双対性)

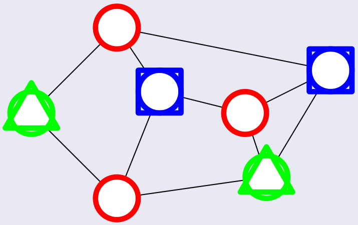
- C が G のクリークである
  $\Rightarrow \chi(G) \geq |C|$

なぜか？

直感：C の部分だけで $\chi(G)$ 色は必要となる

彩色が最適であることの確認法

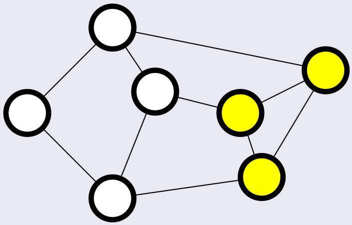
$\chi(G)$ の上界



3 色で塗れた

$\therefore \chi(G) \leq 3$

$\chi(G)$ の下界



頂点数 3 のクリークを見つけた

$\therefore \chi(G) \geq 3$

上界と下界が一致した

$\therefore \chi(G) = 3$

彩色が最適であることの確認法：まとめ

- k 色で塗る (つまり，$\chi(G) \leq k$)
- 頂点数 k のクリークを見つける (つまり，$\chi(G) \geq k$)
- したがって，$\chi(G) = k$

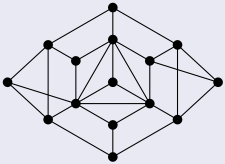
つまり，

彩色問題では，色を塗ることだけではなくて，
クリークを見つけることも重要になる

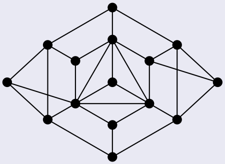
頂点数の大きなクリークが見つけられるとうれしい

彩色の最適性の証明：例

$\chi(G)$ の上界

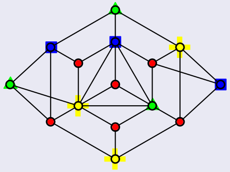


$\chi(G)$ の下界



彩色の最適性の証明：例

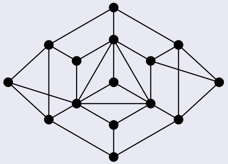
$\chi(G)$ の上界



4 色で塗れた

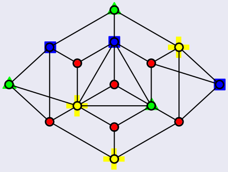
$\therefore \chi(G) \leq 4$

$\chi(G)$ の下界



彩色の最適性の証明：例

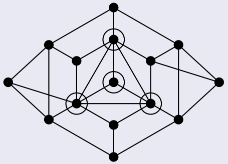
$\chi(G)$ の上界



4 色で塗れた

$\therefore \chi(G) \leq 4$

$\chi(G)$ の下界

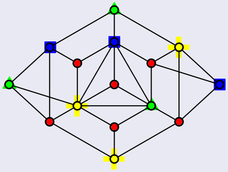


頂点数 4 のクリークを見つけた

$\therefore \chi(G) \geq 4$

彩色の最適性の証明：例

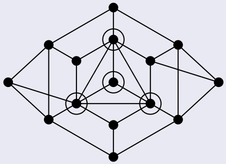
$\chi(G)$ の上界



4 色で塗れた

$\therefore \chi(G) \leq 4$

$\chi(G)$ の下界



頂点数 4 のクリークを見つけた

$\therefore \chi(G) \geq 4$

上界と下界が一致した

$$\therefore \chi(G) = 4$$

染色数がうまく計算できそうな場合

任意のグラフ G に対して

- 任意のクリーク C に対して，$\chi(G) \geq |C|$
- 特に，C を頂点数最大のクリークとすると，$\chi(G) \geq \omega(G)$

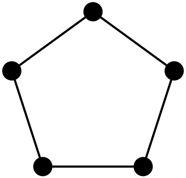
もし

- k 色で塗れれば，$\chi(G) \leq k$
- 頂点数 k のクリークが見つかれば，$\omega(G) \geq k$
- $\therefore \chi(G) \leq k \leq \omega(G) \leq \chi(G)$ となり，$\chi(G) = k = \omega(G)$

つまり

- $\chi(G) = \omega(G)$ が成り立つかどうかは重要そう

頂点数 5 の閉路 C_5



- $\chi(C_5) = 3$
- $\omega(C_5) = 2$

染色数がうまく計算できそうな場合：再掲

任意のグラフ G に対して

- 任意のクリーク C に対して，$\chi(G) \geq |C|$
- 特に，C を頂点数最大のクリークとすると，$\chi(G) \geq \omega(G)$

もし

- k 色で塗れれば，$\chi(G) \leq k$
- 頂点数 k のクリークが見つかれば，$\omega(G) \geq k$
- $\therefore \chi(G) \leq k \leq \omega(G) \leq \chi(G)$ となり，$\chi(G) = k = \omega(G)$

つまり

- $\chi(G) = \omega(G)$ が成り立つかどうかは重要そう

理想グラフ (perfect graph)

グラフ $G = (V, E)$

理想グラフとは？

G が理想グラフであるとは，次が成り立つこと

$$\chi(H) = \omega(H) \qquad \forall \text{ 誘導部分グラフ } H \subseteq G$$

注意

G に対して，$\chi(G) = \omega(G)$ が成り立つことだけではなく
G のすべての誘導部分グラフを考えている

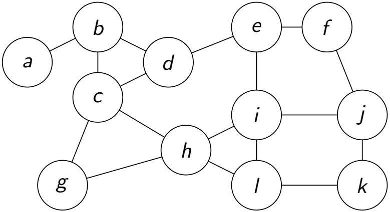
$\rightsquigarrow$ 誘導部分グラフとは？

グラフ $G = (V, E)$，頂点部分集合 $U \subseteq V$

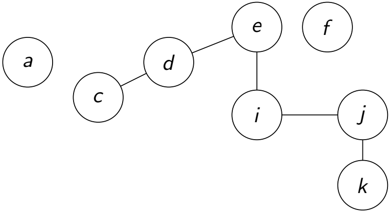
誘導部分グラフとは？

U が**誘導する** G の**部分グラフ**とは，G の部分グラフ $G[U]$ で，

- $G[U]$ の頂点集合は U
- $G[U]$ の辺集合は $\{\{a, b\} \in E \mid a, b \in U\}$



G



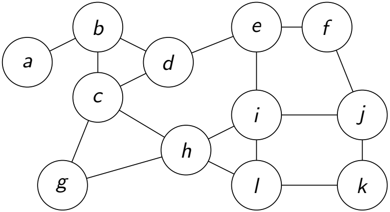
G の誘導部分グラフではない

グラフ $G=(V,E)$，頂点部分集合 $U \subseteq V$

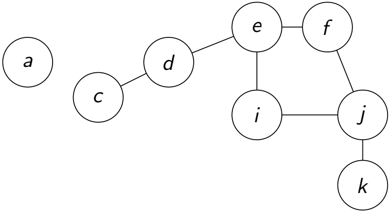
誘導部分グラフとは？

U が誘導する G の部分グラフとは，G の部分グラフ $G[U]$ で，

- $G[U]$ の頂点集合は U
- $G[U]$ の辺集合は $\{\{a,b\} \in E \mid a,b \in U\}$



G



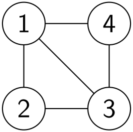
G の誘導部分グラフである

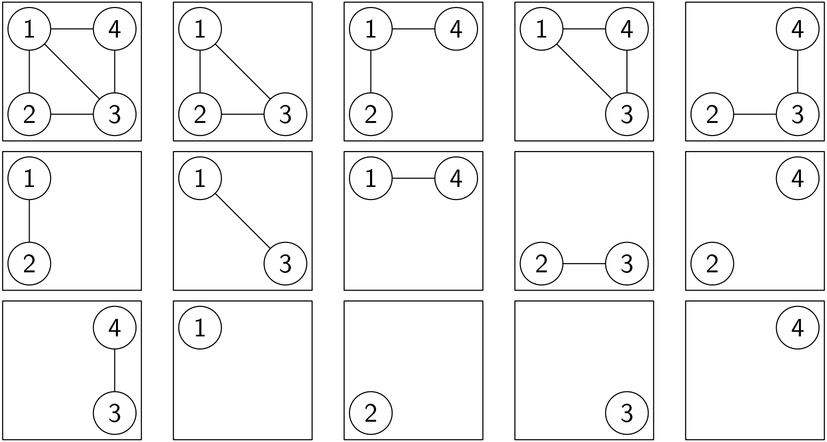
グラフ $G = (V, E)$

理想グラフとは？

G が理想グラフであるとは，次が成り立つこと

$$\chi(H) = \omega(H) \qquad \forall \text{ 誘導部分グラフ } H \subseteq G$$





$$\chi(H) = \omega(H) \qquad \forall \text{ 誘導部分グラフ } H \subseteq G$$

目次

Claude Berge

http://keespopinga.blogspot.com/2012/02/poesia-in-forma-di-grafo.html

Berge ('63) は次の 2 つの予想を提案した

弱理想グラフ予想 (weak perfect graph conjecture)

G が理想グラフ $\Leftrightarrow$ 補グラフ $\overline{G}$ も理想グラフ

強理想グラフ予想 (strong perfect graph conjecture)

G が理想グラフ $\Leftrightarrow$
G と $\overline{G}$ は長さ 5 以上の奇閉路を誘導部分グラフとして含まない

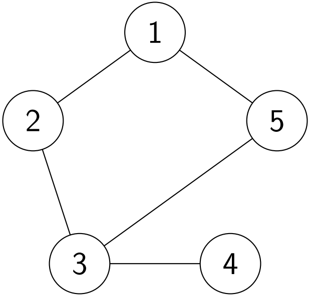
今では，どちらも正しいことが知られている (予想 $\rightsquigarrow$ 定理)

弱理想グラフ定理 (Lovász '72)

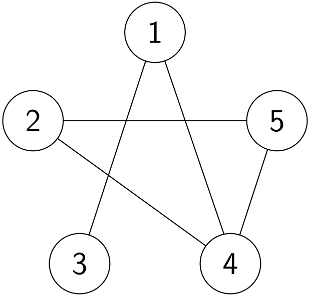
G が理想グラフ ⇔ 補グラフ $\overline{G}$ も理想グラフ

グラフ $G = (V, E)$ の補グラフ $\overline{G}$ とは次のようなグラフ

- 頂点集合：V
- 辺集合：$\{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v, \{u, v\} \notin E\}$



G

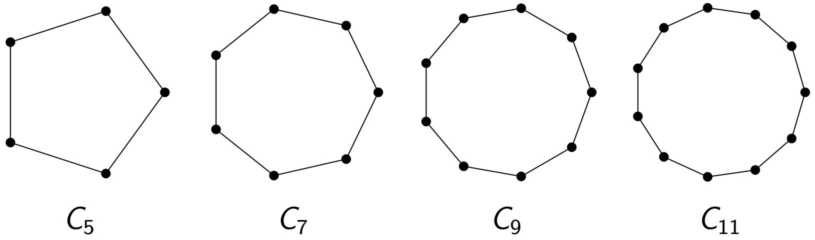


$\overline{G}$

強理想グラフ定理 (Chudnovsky, Robertson, Seymour, Thomas '06)

G が理想グラフ $\Leftrightarrow$
G と $\overline{G}$ は長さ 5 以上の奇閉路を誘導部分グラフとして含まない

奇閉路：長さが奇数の閉路



演習問題

強理想グラフ定理 $\Rightarrow$ 弱理想グラフ定理

定理 (Grötschel, Lovász, Schrijver '88)

理想グラフに対して，次の問題は多項式時間で解ける

- 最小彩色問題 (染色数の計算)
- 最大クリーク問題 (クリーク数の計算)

これは組合せ最適化理論における大きな成果の 1 つ

大目標

理想グラフを通して組合せ最適化の真髄を味わう

細かい目標

次を紹介する

- 弱理想グラフ定理の証明
  - グラフ理論的証明
  - 多面体的証明 (線形計画問題)
- 理想グラフに対するアルゴリズムの紹介
  - 半正定値計画問題と楕円体法
  - グラフのシャノン容量

目次

今日のまとめ

重要概念

理想グラフの定義，理想グラフ定理

次回予告

代表的な理想グラフの紹介

- 二部グラフ
- 二部グラフの補グラフ
- 二部グラフの線グラフ
- 二部グラフの線グラフの補グラフ

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する $\leftarrow$ 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次