離散最適化基礎論　第 13 回
理想グラフに対するアルゴリズム

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2019 年 2 月 8 日

最終更新：2019 年 2 月 8 日　16:43

スケジュール 前半

1. 理想グラフと組合せ最適化 (10/5)
2. 代表的な理想グラフ (1)：二部グラフと二部グラフの線グラフ (10/12)
3. 代表的な理想グラフ (2)：二部グラフの補グラフ (10/19)
4. 代表的な理想グラフ (3)：区間グラフと弦グラフ (10/26)

- ⋆ 出張のため休講 (11/2)

5. 弱理想グラフ定理 (1)：グラフ理論的手法 (11/9)
6. 組合せ最適化と線形計画法 (11/16)

- ⋆ 調布祭 のため 休み (11/23)
- ⋆ 休講 (11/30)

7. 凸多面体の基礎 (12/7)

スケジュール 後半

8. 弱理想グラフ定理 (2)：多面体的手法 (12/14)
9. 楕円体法 (1)：基礎とアルゴリズム (12/21)
10. 楕円体法 (2)：応用 (1/11)

- ⋆ センター試験準備 のため 休み (1/18)

11. 組合せ最適化と半正定値計画法 (1/25)
12. グラフのシャノン容量 (2/1)
13. 理想グラフに対するアルゴリズム (2/8)

目次

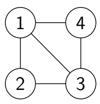
理想グラフ

グラフ $G = (V, E)$

定義：理想グラフとは？

G が理想グラフであるとは，次が成り立つこと

$$\chi(H) = \omega(H) \qquad \forall \text{ 誘導部分グラフ } H \subseteq G$$



理想グラフに対するアルゴリズム

定理 (Grötschel, Lovász, Schrijver '88)

理想グラフに対して，次の問題は多項式時間で解ける

- 最小彩色問題 (染色数の計算)
- 最大クリーク問題 (クリーク数の計算)

これは組合せ最適化理論における大きな成果の 1 つ

この講義の目標

大目標

理想グラフを通して組合せ最適化の真髄を味わう

細かい目標

次を紹介する

- 弱理想グラフ定理の証明
  - グラフ理論的証明
  - 多面体的証明 (線形計画問題)
- 理想グラフに対するアルゴリズムの紹介
  - 半正定値計画問題と楕円体法
  - グラフのシャノン容量

Lovász 数

$G = (V, E)$：無向グラフ，$n = |V|$

定義：Lovász 数

G の Lovász 数 (Lovász number) とは，次の最適化問題の最適値

$$\begin{array}{llll} \text{(LOV)} & \text{maximize} & \displaystyle\sum_{u \in V} \sum_{v \in V} X_{uv} & \\ & \text{subject to} & X_{uv} = 0 & (\{u, v\} \in E) \\ & & \displaystyle\sum_{v \in V} X_{vv} = 1 & \\ & & X \succeq O & (\Leftrightarrow X \in \mathcal{S}^n_+) \end{array}$$

G の Lovász 数を $\vartheta(G)$ で表す

この最適化問題は半正定値計画問題 (多項式時間で計算可能)

補グラフの Lovász 数

$G = (V, E)$：無向グラフ，$n = |V|$

補グラフの Lovász 数

補グラフ $\overline{G}$ の Lovász 数 $\vartheta(\overline{G})$ は次の最適化問題の最適値

$$
\begin{array}{llll}
(\overline{\text{LOV}}) & \text{maximize} & \displaystyle\sum_{u \in V}\sum_{v \in V} X_{uv} & \\
& \text{subject to} & X_{uv} = 0 & (\{u, v\} \notin E) \\
& & \displaystyle\sum_{v \in V} X_{vv} = 1 & \\
& & X \succeq O & (\Leftrightarrow X \in \mathcal{S}^n_+)
\end{array}
$$

これも半正定値計画問題 (多項式時間で計算可能)

Lovász 数とクリーク数，染色数

$G = (V, E)$：無向グラフ

性質：Lovász 数とクリーク数，染色数

$$\omega(G) \le \vartheta(\overline{G}) \le \chi(G)$$

『Lovász のサンドイッチ定理』とも呼ばれる

Lovász 数と理想グラフ

ここまでのまとめ

- $\omega(G) \le \vartheta(\overline{G}) \le \chi(G)$
- $\vartheta(\overline{G})$ は多項式時間で計算可能

G が理想グラフであるならば，$\omega(G) = \chi(G)$ なので，

$$\omega(G) = \vartheta(\overline{G}) = \chi(G)$$

$\therefore$ $\vartheta(\overline{G})$ を計算することで，$\omega(G), \chi(G)$ が計算可能

結論

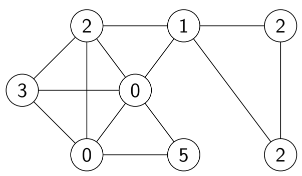
理想グラフのクリーク数と染色数は多項式時間で計算可能

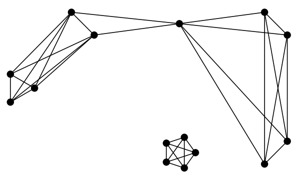
今回：実際に最大クリークと最小彩色を求める方法

目次

第 5 回の復習：複製補題

非負整数による頂点重み $\boldsymbol{w}$ が与えられる　$\rightsquigarrow$　各頂点を複製する





復習：複製補題

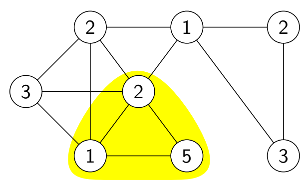
G が理想グラフ　$\Rightarrow$　複製後のグラフ $G_{\boldsymbol{w}}$ も理想グラフ

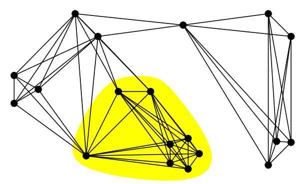
重み付きクリーク数

$G = (V, E)$：無向グラフ，$\boldsymbol{w} \in \mathbb{N}^V$：頂点重み

定義：重み付きクリーク数とは？

$\boldsymbol{w}$ による G の重み付きクリーク数とは，
複製後のクリーク $G_{\boldsymbol{w}}$ のクリーク数のこと



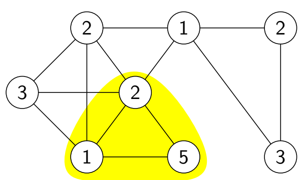


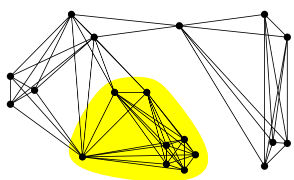
重み付きクリーク：別の解釈

$G = (V, E)$：無向グラフ，$\boldsymbol{w} \in \mathbb{N}^V$：頂点重み

重み付きクリーク数の解釈

$\boldsymbol{w}$ による G の重み付きクリーク数は，
クリークの頂点重み和の最大値



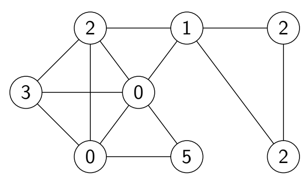


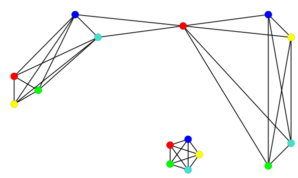
重み付き染色数

$G = (V, E)$：無向グラフ，$\boldsymbol{w} \in \mathbb{N}^V$：頂点重み

定義：重み付き染色数とは？

$\boldsymbol{w}$ による G の重み付き染色数とは，
複製後のクリーク $G_{\boldsymbol{w}}$ の染色数のこと





重み付きクリーク数と重み付き染色数の計算

復習：複製補題

G が理想グラフ $\Rightarrow$ 複製後のグラフ $G_{\boldsymbol{w}}$ も理想グラフ

$G = (V, E)$：理想グラフ とする

帰結

$\boldsymbol{w}$ による G の重み付きクリーク数と重み付き染色数を計算するには，理想グラフ $G_{\boldsymbol{w}}$ のクリーク数と染色数を計算すればよい

問題点

$G_{\boldsymbol{w}}$ の頂点数は G と $\boldsymbol{w}$ のサイズに関する多項式で収まらない

- G のサイズ $= O(|V| + |E|) = O(|V|^2)$
- $\boldsymbol{w}$ のサイズ $= O(\sum_{v \in V} \log w_v)$
- $G_{\boldsymbol{w}}$ のサイズ $= O((\sum_{v \in V} w_v)^2)$

重み付きクリーク数と重み付き染色数の計算 (続)

$G = (V, E)$：理想グラフ

定理

重み付きクリーク数と重み付き染色数は多項式時間で計算できる

証明のアイディア (詳細は割愛)：
- 次のページにある半正定値計画問題 ($\overline{\mathrm{LOV}}_{\boldsymbol{w}}$) を考える
- ($\overline{\mathrm{LOV}}_{\boldsymbol{w}}$) は多項式時間で解ける (ことを証明する)
- ($\overline{\mathrm{LOV}}_{\boldsymbol{w}}$) の最適値は $\vartheta(\overline{G}_{\boldsymbol{w}})$ に等しい (ことを証明する) □

重み付き Lovász 数

$G = (V, E)$：無向グラフ，$n = |V|$

補グラフの重み付き Lovász 数

$$
\begin{array}{lll}
(\overline{\mathrm{LOV}}_{\boldsymbol{w}}) & \text{maximize} & \displaystyle\sum_{u \in V}\sum_{v \in V} \sqrt{w_u w_v} X_{uv} \\
& \text{subject to} & X_{uv} = 0 \quad (\{u, v\} \notin E) \\
& & \displaystyle\sum_{v \in V} X_{vv} = 1 \\
& & X \succeq O \quad (\Leftrightarrow X \in \mathcal{S}^n_+)
\end{array}
$$

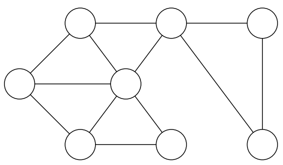
これは半正定値計画問題 (多項式時間で計算可能)

目次

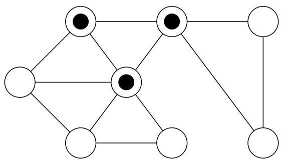
クリーク数から最大クリークへ

手元にあるアルゴリズム

- 理想グラフ G に対して，$\omega(G)$ を出力する (出力は整数値)



3



作りたいアルゴリズム

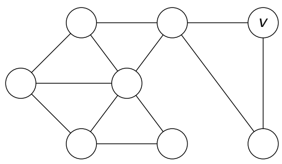
- 理想グラフ G に対して，最大クリークを出力する (出力は集合)

クリーク数から最大クリークへ：補題

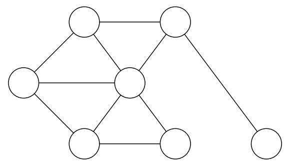
$G = (V, E)$：無向グラフ (理想グラフである必要はない)，$v \in V$：頂点

補題

1. $\omega(G) = \omega(G - v) \Rightarrow G$ のある最大クリークは v を含まない
2. $\omega(G) > \omega(G - v) \Rightarrow G$ のどの最大クリークも v を含む



G



$G - v$

クリーク数から最大クリークへ：補題 — 証明 (1)

$G = (V, E)$：無向グラフ (理想グラフである必要はない)，$v \in V$：頂点

補題

1. $\omega(G) = \omega(G - v) \Rightarrow G$ のある最大クリークは v を含まない

証明：C を $G - v$ の最大クリークとする ($\omega(G - v) = |C|$，$v \notin C$)
- このとき，C は G のクリークで，$|C| = \omega(G - v) = \omega(G)$
- $\therefore$ C は G の最大クリークで，v を含まない □

クリーク数から最大クリークへ：補題 — 証明 (2)

$G = (V, E)$：無向グラフ (理想グラフである必要はない)，$v \in V$：頂点

補題

2. $\omega(G) > \omega(G - v) \Rightarrow G$ のどの最大クリークも v を含む

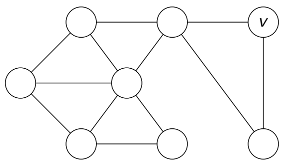
証明：C を G の最大クリークとする ($\omega(G) = |C|$)
- $v \notin C$ とする
- C は $G - v$ のクリークなので，$\omega(G) = |C| \leq \omega(G - v) < \omega(G)$
- これは矛盾なので，$v \in C$ □

クリーク数から最大クリークへ：補題の帰結

$G = (V, E)$：無向グラフ（理想グラフである必要はない），$v \in V$：頂点

補題の帰結

1. $\boxed{\omega(G) = \omega(G - v) \Rightarrow G \text{ のある最大クリークは } v \text{ を含まない}}$
   つまり，G の最大クリークを見つけるには，
   $G - v$ の最大クリークを見つければよい
2. $\boxed{\omega(G) > \omega(G - v) \Rightarrow G \text{ のどの最大クリークも } v \text{ を含む}}$
   つまり，G の最大クリークを見つけるには，
   $G[N(v)]$ の最大クリークに v を付け加えればよい



$N(v) = v$ の隣接点集合

理想グラフの最大クリーク：まとめ

結論

理想グラフの最大クリークは 多項式時間で構成できる

同じ考え方で，次の命題も得られる

演習問題

理想グラフの最大重みクリークは 多項式時間で構成できる

補グラフを考えれば，次の命題も得られる

結論（続）

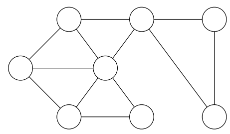
理想グラフの最大重み独立集合は 多項式時間で構成できる

目次

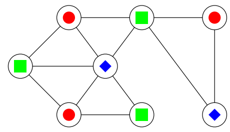
染色数から最小彩色へ

手元にあるアルゴリズム

- 理想グラフ G に対して，$\chi(G)$ を出力する （出力は整数値）
- 理想グラフ G と頂点重み $\boldsymbol{w}$ に対して，最大重み独立集合を出力する （出力は集合）



3



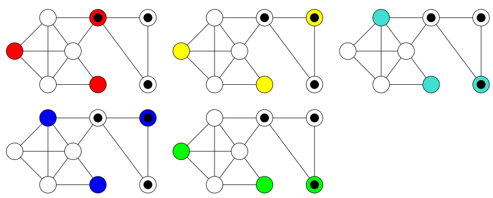
作りたいアルゴリズム

- 理想グラフ G に対して，最小彩色を出力する （出力は頂点集合の分割）

染色数から最小彩色へ：第 5 回の復習

第 5 回の復習

理想グラフ G には，すべての最大独立集合と交わるクリークが存在



理想グラフの補グラフ $\overline{G}$ も理想グラフなので（弱理想グラフ定理），次が成り立つ

「第 5 回の復習」の系

理想グラフには，すべての最大クリークと交わる独立集合が存在

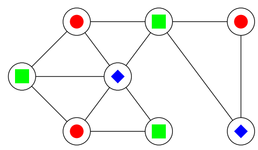
染色数から最小彩色へ：アルゴリズムの概要

$G = (V, E)$：理想グラフ

最小彩色を見つけるアルゴリズム：概要

S = G の独立集合で，すべての最大クリークと交わるもの

- このとき，$\chi(G) = \omega(G) > \omega(G - S) = \chi(G - S)$
- $k = \chi(G - S)$ とすると，
  $G - S$ の最小彩色は独立集合 $S_1, S_2, \ldots, S_k$ への分割と見なせる
- $\therefore$ 独立集合への分割 $S_1, S_2, \ldots, S_k, S$ は G の最小彩色と見なせる



つまり，S を見つけて，再帰で，$G - S$ の最小彩色を見つければよい

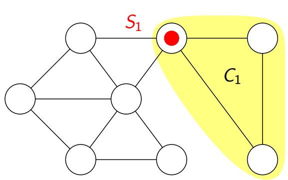
すべての最大クリークと交わる独立集合を見つける

$G = (V, E)$：理想グラフ

すべての最大クリークと交わる独立集合を見つける：ステップ 1

アイディア：最大クリークをいくつか順に見つける

1. $C_1 \leftarrow G$ の最大クリーク
2. $S_1 \leftarrow G$ の独立集合で，C_1 と交わるもの



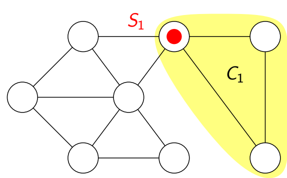
すべての最大クリークと交わる独立集合を見つける

$G = (V, E)$：理想グラフ

すべての最大クリークと交わる独立集合を見つける：ステップ 1

アイディア：最大クリークをいくつか順に見つける

3. $\omega(G) > \omega(G - S_1) \Rightarrow$
   S_1 はすべての最大クリークと交わる $\rightsquigarrow$ S_1 を出力して，終了



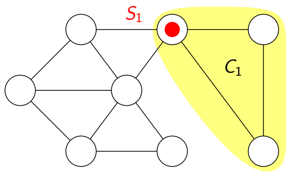
すべての最大クリークと交わる独立集合を見つける

$G = (V, E)$：理想グラフ

すべての最大クリークと交わる独立集合を見つける：ステップ 1

アイディア：最大クリークをいくつか順に見つける

4. $\omega(G) = \omega(G - S_1) \Rightarrow$
   $G - S_1$ の最大クリークは G の最大クリーク $\rightsquigarrow$ ステップ 2 へ



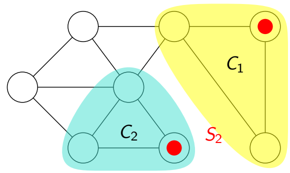
すべての最大クリークと交わる独立集合を見つける

$G = (V, E)$：理想グラフ

すべての最大クリークと交わる独立集合を見つける：ステップ 2

アイディア：最大クリークをいくつか順に見つける

1. $C_2 \leftarrow G - S_1$ の最大クリーク
2. $S_2 \leftarrow G$ の独立集合で，C_1, C_2 と交わるもの



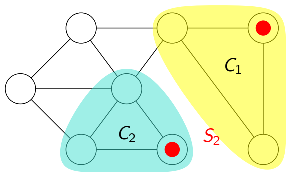
すべての最大クリークと交わる独立集合を見つける

$G = (V, E)$：理想グラフ

すべての最大クリークと交わる独立集合を見つける：ステップ 2

アイディア：最大クリークをいくつか順に見つける

3. $\omega(G) > \omega(G - S_2) \Rightarrow$
   S_2 はすべての最大クリークと交わる $\rightsquigarrow$ S_2 を出力して，終了



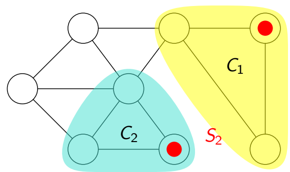
すべての最大クリークと交わる独立集合を見つける

$G = (V, E)$：理想グラフ

すべての最大クリークと交わる独立集合を見つける：ステップ 2

アイディア：最大クリークをいくつか順に見つける

4. $\omega(G) = \omega(G - S_2) \Rightarrow$
   $G - S_2$ の最大クリークは G の最大クリーク $\rightsquigarrow$ ステップ 3 へ



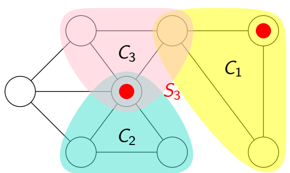
すべての最大クリークと交わる独立集合を見つける

$G = (V, E)$：理想グラフ

すべての最大クリークと交わる独立集合を見つける：ステップ t

$C_1, C_2, \ldots, C_{t-1}$：ここまでで見つかった G の最大クリーク

1. $C_t \leftarrow G - S_{t-1}$ の最大クリーク
2. $S_t \leftarrow G$ の独立集合で，$C_1, C_2, \ldots, C_t$ と交わるもの



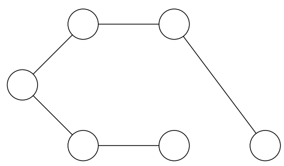
すべての最大クリークと交わる独立集合を見つける

$G = (V, E)$：理想グラフ

すべての最大クリークと交わる独立集合を見つける：ステップ t

アイディア：最大クリークをいくつか順に見つける

3. $\omega(G) > \omega(G - S_t) \Rightarrow$
   S_t はすべての最大クリークと交わる $\rightsquigarrow$ S_t を出力して，終了



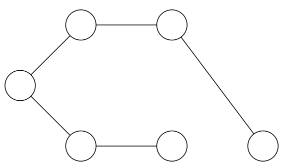
すべての最大クリークと交わる独立集合を見つける

$G = (V, E)$：理想グラフ

すべての最大クリークと交わる独立集合を見つける：ステップ t

アイディア：最大クリークをいくつか順に見つける

4. $\omega(G) = \omega(G - S_t) \Rightarrow$
   $G - S_t$ の最大クリークは G の最大クリーク $\rightsquigarrow$ ステップ $t + 1$ へ



すべての最大クリークと交わる独立集合を見つける

$G = (V, E)$：理想グラフ

すべての最大クリークと交わる独立集合を見つける

これを続けて，最終的に，
すべての最大クリークと交わる独立集合が見つかる

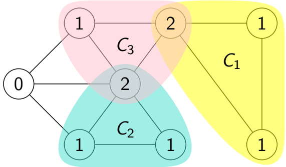
考えなくてはいけないこと

- 「$C_1, C_2, \ldots, C_t$ と交わる独立集合」をどのように見つけるか？
- ステップ数はいくつになるのか？

注：最大クリークの数は膨大 (指数関数的) かもしれない

与えられたすべての最大クリークと交わる独立集合を見つける

頂点 v の重み $= C_1, C_2, \ldots, C_t$ の中で v を含むものの数



重み最大の独立集合を見つける

$\rightsquigarrow$ 見つかる独立集合 S_t の重み $= t$

アルゴリズムのステップ数

見つかったクリーク $C_1, C_2, \ldots, C_t$ から

ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_t \in \mathbb{R}^V$ を作る

$$\boldsymbol{x}_i(v) = \begin{cases} 1 & (v \in C_i) \\ 0 & (v \notin C_i) \end{cases}$$

演習問題

ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_t$ は線形独立

つまり，$t \leq |V|$

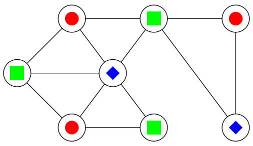
染色数から最小彩色へ：アルゴリズムの概要 (再掲)

$G = (V, E)$：理想グラフ

最小彩色を見つけるアルゴリズム：概要

$S = G$ の独立集合で，すべての最大クリークと交わるもの

- このとき，$\chi(G) = \omega(G) > \omega(G - S) = \chi(G - S)$
- $k = \chi(G - S)$ とすると，
  $G - S$ の最小彩色は独立集合 $S_1, S_2, \ldots, S_k$ への分割と見なせる
- $\therefore$ 独立集合への分割 $S_1, S_2, \ldots, S_k, S$ は G の最小彩色と見なせる



つまり，S を見つけて，再帰で，$G - S$ の最小彩色を見つければよい

目次

スケジュール 前半

1	理想グラフと組合せ最適化	(10/5)
2	代表的な理想グラフ (1)：二部グラフと二部グラフの線グラフ	(10/12)
3	代表的な理想グラフ (2)：二部グラフの補グラフ	(10/19)
4	代表的な理想グラフ (3)：区間グラフと弦グラフ	(10/26)
⋆	出張のため休講	(11/2)
5	弱理想グラフ定理 (1)：グラフ理論的手法	(11/9)
6	組合せ最適化と線形計画法	(11/16)
⋆	調布祭 のため 休み	(11/23)
⋆	休講	(11/30)
7	凸多面体の基礎	(12/7)

スケジュール 後半

8	弱理想グラフ定理 (2)：多面体的手法	(12/14)
9	楕円体法 (1)：基礎とアルゴリズム	(12/21)
10	楕円体法 (2)：応用	(1/11)
⋆	センター試験準備 のため 休み	(1/18)
11	組合せ最適化と半正定値計画法	(1/25)
12	グラフのシャノン容量	(2/1)
13	理想グラフに対するアルゴリズム	(2/8)

概要

主題

離散最適化のトピックの 1 つとして理想グラフを取り上げ，
その数理的側面と計算的側面の双方を意識して講義する

なぜ講義で取り扱う？

- 重要な概念であるから
- 組合せ最適化の様々な技法を紹介できるから

重要なメッセージ

「連続最適化」と「離散最適化」という分類の無意味さ