離散最適化基礎論　第 12 回
グラフのシャノン容量

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2019 年 2 月 1 日

最終更新：2019 年 2 月 8 日　16:44

スケジュール 前半

1. 理想グラフと組合せ最適化 (10/5)
2. 代表的な理想グラフ (1)：二部グラフと二部グラフの線グラフ (10/12)
3. 代表的な理想グラフ (2)：二部グラフの補グラフ (10/19)
4. 代表的な理想グラフ (3)：区間グラフと弦グラフ (10/26)

⋆ 出張のため休講 (11/2)

5. 弱理想グラフ定理 (1)：グラフ理論的手法 (11/9)
6. 組合せ最適化と線形計画法 (11/16)

⋆ 調布祭 のため 休み (11/23)

⋆ 休講 (11/30)

7. 凸多面体の基礎 (12/7)

スケジュール 後半 (予定)

8. 弱理想グラフ定理 (2)：多面体的手法 (12/14)
9. 楕円体法 (1)：基礎とアルゴリズム (12/21)
10. 楕円体法 (2)：応用 (1/11)

⋆ センター試験準備 のため 休み (1/18)

11. 組合せ最適化と半正定値計画法 (1/25)
12. グラフのシャノン容量 (2/1)
13. 理想グラフに対するアルゴリズム (2/8)

⋆ ~~期末試験~~ ~~(2/15？)~~

注意：予定の変更もありうる

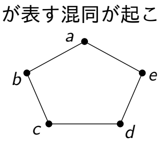
評価法に関する変更

レポートにする予定 (詳細は後日)

目次

ゼロ誤り通信路容量 (1)

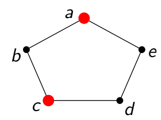
- アルファベット $\{a, b, c, d, e\}$ を持つ通信路を考える
- このとき，以下のグラフが表す混同が起こり得ると考える



- 混同がなければ，$\log_2 5 \approx 2.32$ ビット/伝送
- 混同があるので，これほど大きな容量は達成できない

ゼロ誤り通信路容量 (2)：グラフの独立集合

- a, c を使って符号化：$\log_2 2 = 1$ ビット/伝送
- a, c は混同されない



グラフの独立集合とは？

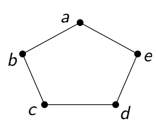
無向グラフ $G = (V, E)$ の独立集合とは，頂点部分集合 $I \subseteq V$ で，I の任意の 2 頂点間に G の辺が存在しないもの

グラフ G の独立数 $\alpha(G)$ = G の独立集合の要素数の最大値

- $\{a, c\}$ は混同グラフの独立集合

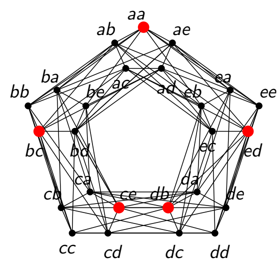
ゼロ誤り通信路容量 (3)：符号語長を 2 にすると

- aa, bc, ce, db, ed で符号化：$(\log_2 5)/2 \approx 1.16$ ビット/伝送
- これらは混同されない (なぜ？)



⇝ 符号語長が 2 の場合の混同グラフを描いてみる

ゼロ誤り通信路容量 (3)：符号語長が 2 の場合の混同グラフ



$\{aa, bc, ce, db, ed\}$ はこのグラフの独立集合

疑問

- もっと要素数の大きな独立集合はあるか？
- 混同グラフが別の形をしている場合はどうか？

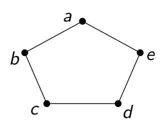
グラフの積

無向グラフ $G = (V_G, E_G)$, $H = (V_H, E_H)$

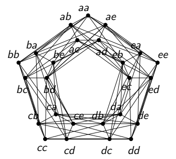
グラフの積とは？

G と H の積 $G \boxtimes H$ とは次のグラフ

- 頂点集合は $V_G \times V_H$ (直積)
- (u_1, v_1) と (u_2, v_2) の間に辺があるのは次のときのみ
  - $\{u_1, u_2\} \in E_G$ かつ $\{v_1, v_2\} \in E_H$
  - $u_1 = u_2$ かつ $\{v_1, v_2\} \in E_H$
  - $\{u_1, u_2\} \in E_G$ かつ $v_1 = v_2$



C_5



$C_5 \boxtimes C_5$

さらなる疑問

符号語長を 2 よりも長くしたらどうなるか？

- 符号語長を 3 にしたとき考えるのは $\alpha(G \boxtimes G \boxtimes G)$
- $\rightsquigarrow$ レートは $(\log_2 \alpha(G \boxtimes G \boxtimes G))/3 = \log_2 \alpha(G \boxtimes G \boxtimes G)^{1/3}$
- 符号語長を k にしたときのレートは

$$\log_2 \alpha(\underbrace{G \boxtimes \cdots \boxtimes G}_{k\text{ 個}})^{1/k}$$

定義：グラフのシャノン容量 (Shannon capacity)

グラフ G のシャノン容量とは次の値

$$\Theta(G) = \sup_k \alpha(\underbrace{G \boxtimes \cdots \boxtimes G}_{k\text{ 個}})^{1/k}$$

シャノン容量の計算は難しい問題で，ほとんどの場合未解決

目次

独立数とシャノン容量の関係

$G = (V, E)$：無向グラフ

性質：独立数とシャノン容量の関係

$$\alpha(G) \leq \Theta(G)$$

証明：シャノン容量の定義より

$$\Theta(G) = \sup_k \alpha(\underbrace{G \boxtimes \cdots \boxtimes G}_{k\text{ 個}})^{1/k} \geq \alpha(G)$$

□

補グラフの染色数とシャノン容量の関係

$G = (V, E)$：無向グラフ

性質：補グラフの染色数とシャノン容量の関係

$$\Theta(G) \leq \chi(\overline{G})$$

これを示すためには，次を証明すればよい

補題

$$\chi(\overline{G \boxtimes H}) \leq \chi(\overline{G}) \cdot \chi(\overline{H})$$

補題が正しいとすると，

$$\begin{aligned}\Theta(G) &= \sup_k \alpha(\underbrace{G \boxtimes \cdots \boxtimes G}_{k\text{ 個}})^{1/k} \\ &\leq \sup_k \chi(\overline{\underbrace{G \boxtimes \cdots \boxtimes G}_{k\text{ 個}}})^{1/k} \leq \sup_k (\chi(\overline{G})^k)^{1/k} = \chi(\overline{G})\end{aligned}$$

補グラフの染色数とシャノン容量の関係：補題の証明

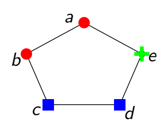
$G = (V, E)$：無向グラフ

補題：証明すること

$$\chi(\overline{G \boxtimes H}) \leq \chi(\overline{G}) \cdot \chi(\overline{H})$$

証明：$k = \chi(\overline{G}), \ell = \chi(\overline{H})$ とする

- G の頂点集合は k 個のクリーク $A_1, A_2, \ldots, A_k$ に分割できる
- H の頂点集合は ℓ 個のクリーク $B_1, B_2, \ldots, B_\ell$ に分割できる



補グラフの染色数とシャノン容量の関係：補題の証明 (続)

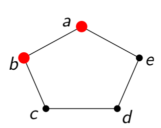
$G = (V, E)$：無向グラフ

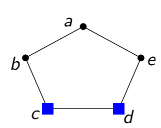
補題：証明すること

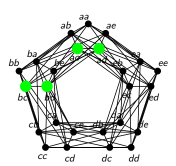
$$\chi(\overline{G \boxtimes H}) \leq \chi(\overline{G}) \cdot \chi(\overline{H})$$

証明 (続)：

- ここで，$A_i \times B_j$ は $G \boxtimes H$ のクリークである (なぜ？)
- つまり，$G \boxtimes H$ は $k \cdot \ell$ 個のクリークに分割できる
- $\therefore \chi(\overline{G \boxtimes H}) \leq k \cdot \ell = \chi(\overline{G}) \cdot \chi(\overline{H})$ □







目次

復習：Lovász 数

$G = (V, E)$：無向グラフ，$n = |V|$

定義：Lovász 数

G の Lovász 数 (Lovász number) とは，次の最適化問題の最適値

$$
\begin{array}{llll}
\text{(LOV)} & \text{maximize} & \displaystyle\sum_{u \in V} \sum_{v \in V} X_{uv} & \\
& \text{subject to} & X_{uv} = 0 & (\{u, v\} \in E) \\
& & \displaystyle\sum_{v \in V} X_{vv} = 1 & \\
& & X \succeq O & (\Leftrightarrow X \in \mathcal{S}^n_+)
\end{array}
$$

G の Lovász 数を $\vartheta(G)$ で表す

- この最適化問題は半正定値計画問題
- Lovász 数は多項式時間で計算可

復習：Lovász 数の性質

$G = (V, E)$：無向グラフ

性質：Lovász 数とクリーク数，染色数 (前回の講義)

$$\omega(G) \leq \vartheta(\overline{G}) \leq \chi(G)$$

$\omega(\overline{G}) = \alpha(G)$ なので，

$$\alpha(G) \leq \vartheta(G) \leq \chi(\overline{G})$$

ここまでのまとめ

以下の関係が成り立つことを証明してきた

- $\alpha(G) \leq \vartheta(G) \leq \chi(\overline{G})$ (前回)
- $\alpha(G) \leq \Theta(G) \leq \chi(\overline{G})$ (今回)

$\boxed{G \text{ が理想グラフである}}$ とすると

- $\omega(G) = \chi(G)$ (理想グラフの定義)
- $\alpha(G) = \chi(\overline{G})$ (理想グラフの補グラフは理想グラフ)

したがって，$\alpha(G) = \Theta(G) = \vartheta(G) = \chi(\overline{G})$

帰結

- $\vartheta(G)$ は多項式時間で計算できるので，
  G が理想グラフであるとき，$\Theta(G)$ も多項式時間で計算できる
- 代表的な理想グラフに対して，シャノン容量が分かる

例えば，$\Theta(K_n) = 1$，$\Theta(K_{m,n}) = \max\{m, n\}$，$\Theta(C_{2k}) = k$ など

Claude Berge

http://keespopinga.blogspot.com/2012/02/poesia-in-forma-di-grafo.html

目次

シャノン容量と理想グラフではないグラフ

ここまでのまとめ

- $\vartheta(G)$ は多項式時間で計算できるので，
  G が理想グラフであるとき，$\Theta(G)$ も多項式時間で計算できる
- 代表的な理想グラフに対して，シャノン容量が分かる

例えば，$\Theta(K_n) = 1$，$\Theta(K_{m,n}) = \max\{m, n\}$，$\Theta(C_{2k}) = k$ など

残る疑問

- 理想グラフではないグラフのシャノン容量は簡単に計算できるのか？
- 理想グラフではない代表的なグラフのシャノン容量は何なのか？

例えば，$\Theta(C_5) = ???$，$\Theta(C_7) = ???$

目標

$\Theta(C_5) = \sqrt{5}$ であることを証明する

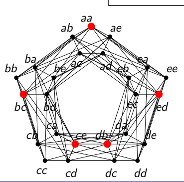
頂点数 5 の閉路のシャノン容量

頂点数 5 の閉路 C_5 のシャノン容量は何だろうか？

いままでの議論より

$$\Theta(G) = \sup_k \alpha(\underbrace{G \boxtimes \cdots \boxtimes G}_{k \text{ 個}})^{1/k} \geq \alpha(G \boxtimes G)^{1/2}$$

下の図から，$\alpha(C_5 \boxtimes C_5) \geq 5$ なので，$\boxed{\Theta(C_5) \geq \sqrt{5}}$



上界を与えるために？

$\vartheta_2(G)$ という量を定義する

最大固有値の最小化

$G = (V, E)$：無向グラフ，$n = |V|$

定義

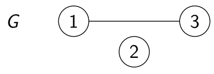
$\vartheta_2(G)$ とは，次の最適化問題の最適値

$$
\begin{array}{llll}
\text{(EIG)} & \text{minimize} & \Lambda(A + J) & \\
& \text{subject to} & A_{vv} = 0 & (v \in V) \\
& & A_{uv} = 0 & (\{u, v\} \notin E) \\
& & A \in \mathcal{S}^n & (\Leftrightarrow A \text{ は実対称})
\end{array}
$$

ただし，

- J：全ての成分が 1 である行列
- $\Lambda(A + J)$：実対称行列 A の最大固有値

最大固有値の最小化：例



$$A+J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- $A+J$ の最大固有値が最小になるように x を決めたい
- $A+J$ の特性方程式は $(\lambda + x - 1)(\lambda^2 - (x+2)\lambda - 1) = 0$
- $\therefore$ $A+J$ の固有値は，$1-x, \dfrac{x+2 \pm \sqrt{x^2+8}}{2}$
- $A+J$ の最大固有値が最小になるのは $x=-1$ のときで，そのとき，$A+J$ の最大固有値は 2

したがって，このグラフ G に対して，$\vartheta_2(G) = 2$

最大固有値の最小化：重要な性質 (1) — Lovász 数との関係

$G=(V,E)$：無向グラフ

重要な性質 (1)：Lovász 数との関係

$$\alpha(G) \le \vartheta(G) \le \vartheta_2(G)$$

$\boxed{注}$：実際は $\vartheta(G) = \vartheta_2(G)$ が成り立つが，
その事実はこの講義で使わない

- $\alpha(G) \le \vartheta(G)$ は証明済み
- $\vartheta(G) \le \vartheta_2(G)$ を証明する

補題

復習：$X \bullet Y = \mathrm{tr}(X^\top Y)$

補題

$X, Y \in \mathcal{S}^n_+$：半正定値 $\quad\Rightarrow\quad X \bullet Y \ge 0$

証明：X は半正定値なので，$X = LL^\top, Y = MM^\top$ と分解できる

- このとき，次が成り立つ

$$\begin{aligned} X \bullet Y &= \mathrm{tr}(X^\top Y) \\ &= \mathrm{tr}((LL^\top)^\top MM^\top) \\ &= \mathrm{tr}(L^\top LMM^\top) \\ &= \mathrm{tr}(LMM^\top L^\top) \\ &= \mathrm{tr}(LM(LM)^\top) \end{aligned}$$

- $LM(LM)^\top$ は実対称半正定値なので，その固有値はすべて非負
- トレースは全固有値の和に等しいので，$\mathrm{tr}(LM(LM)^\top) \ge 0$
- したがって，$X \bullet Y \ge 0$ □

最大固有値の最小化：重要な性質 (1) — Lovász 数との関係 (続)

$G=(V,E)$：無向グラフ

証明すること

$$\vartheta(G) \le \vartheta_2(G)$$

方針：(LOV) の最適解と (EIG) の最適解を比較する

- X^* を (LOV) の最適解，A^* を (EIG) の最適解とする
- λ を A^*+J の最大固有値とすると，$\vartheta_2(G) = \lambda$
- このとき，$\lambda I - (A^* + J)$ は半正定値 (演習問題)
- したがって，補題より，$X^* \bullet (\lambda I - (A^*+J)) \ge 0$

最大固有値の最小化：重要な性質 (1) — Lovász 数との関係 (続 2)

$G=(V,E)$：無向グラフ

証明すること

$$\vartheta(G) \le \vartheta_2(G)$$

式変形

$$\begin{aligned} 0 &\le X^* \bullet (\lambda I - (A^* + J)) \\ &= X^* \bullet (\lambda I) - X^* \bullet A^* - X^* \bullet J \\ &= \lambda \sum_{v \in V} X^*_{vv} - \sum_{u \in V}\sum_{v \in V} X^*_{uv} \\ &= \lambda - \vartheta(G) \end{aligned}$$

したがって，$\vartheta(G) \le \lambda = \vartheta_2(G)$ □

最大固有値の最小化：重要な性質 (2) — グラフの積との関係

$G=(V,E), G'=(V',E')$：無向グラフ

重要な性質 (2)

$$\vartheta_2(G \boxtimes G') \le \vartheta_2(G) \cdot \vartheta_2(G')$$

「重要な性質 (2)」が正しいとすると，

$$\begin{aligned} \Theta(G) &= \sup_k \alpha(\underbrace{G \boxtimes \cdots \boxtimes G}_{k\,個})^{1/k} \\ &\le \sup_k \vartheta_2(\underbrace{G \boxtimes \cdots \boxtimes G}_{k\,個})^{1/k} = \sup_k (\vartheta_2(G)^k)^{1/k} = \vartheta_2(G) \end{aligned}$$

$\therefore \boxed{\Theta(G) \le \vartheta_2(G)}$

準備：行列のクロネッカー積

m, m', n, n'：自然数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, A' \in \mathbb{R}^{m' \times n'}$：行列

定義：行列のクロネッカー積 (Kronecker product)

A と A' の**クロネッカー積**とは，次の $mm' \times nn'$ 行列

$$A \otimes A' = \begin{pmatrix} A_{11}A' & \cdots & A_{1n}A' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}A' & \cdots & A_{mn}A' \end{pmatrix} \quad つまり，\quad (A \otimes A')_{(i,i'),(j,j')} = A_{ij}A'_{i'j'}$$

例：$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ であるとき，

$$A \otimes A' = \begin{pmatrix} 2\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ 1\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 4 & 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot 4 & 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 & 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 2 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

準備：行列のクロネッカー積の性質：分配法則

$A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$，$C, D \in \mathbb{R}^{m' \times n'}$：行列

性質

(1) $(A+B) \otimes (C+D) = (A \otimes C) + (B \otimes C) + (A \otimes D) + (B \otimes D)$

証明：演習問題 (定義を使うだけでよい)

準備：行列のクロネッカー積の性質：行列積とクロネッカー積 (1)

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{m' \times n'}$：行列

性質

(2) $A \otimes B = (A \otimes I_{m'})(I_n \otimes B) = (I_m \otimes B)(A \otimes I_{n'})$

証明：$A \otimes B = (A \otimes I_{m'})(I_n \otimes B)$ を示す

$$\begin{aligned}(A \otimes I_{m'})(I_n \otimes B) &= \begin{pmatrix} A_{11}I_{m'} & \cdots & A_{1n}I_{m'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}I_{m'} & \cdots & A_{mn}I_{m'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & \cdots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \cdots & B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}B & \cdots & A_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}B & \cdots & A_{mn}B \end{pmatrix} = A \otimes B\end{aligned}$$

$A \otimes B = (I_m \otimes B)(A \otimes I_{n'})$ も同様 □

準備：行列のクロネッカー積の性質：行列積とクロネッカー積 (2)

A, B, C, D：行列 (次の「性質」に書かれている積が定義できる)

性質

(3) $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$

証明：演習問題 (性質 (2) を使う)

準備：行列のクロネッカー積の性質：クロネッカー積と半正定値性

A, B：行列

性質

(4) A, B：実対称半正定値 $\Rightarrow$ $A \otimes B$：実対称半正定値

証明の概略：$A \otimes B$ が対称であることはすぐ分かる (なぜ？)

- $A = LL^\top$, $B = MM^\top$ とする (コレスキー分解)
- このとき，

$$\begin{aligned} A \otimes B &= (LL^\top) \otimes (MM^\top) \\ &= (L \otimes M)(L^\top \otimes M^\top) \qquad \text{(性質 3)} \\ &= (L \otimes M)(L \otimes M)^\top \end{aligned}$$

- つまり，$A \otimes B$ は半正定値 □

最大固有値の最小化：重要な性質 (2) — グラフの積との関係 (続)

$G = (V, E), G' = (V', E')$：無向グラフ

証明すること

$$\vartheta_2(G \boxtimes G') \leq \vartheta_2(G) \cdot \vartheta_2(G')$$

証明：

- A を G に対する (EIG) の最適解，
  A' を G' に対する (EIG) の最適解とする
- つまり，$\vartheta_2(G) = \Lambda(A + J)$，$\vartheta_2(G') = \Lambda(A' + J')$
  (J, J' は成分がすべて 1 である行列)
- このとき，$A \otimes A'$ は $G \boxtimes G'$ に対する (EIG) の許容解 (なぜ？)

最大固有値の最小化：重要な性質 (2) — グラフの積との関係 (続 2)

$G = (V, E), G' = (V', E')$：無向グラフ

証明すること

$$\vartheta_2(G \boxtimes G') \leq \vartheta_2(G) \cdot \vartheta_2(G')$$

証明 (続)：

- $B = \vartheta_2(G)I - (A + J)$ と $B' = \vartheta_2(G')I' - (A' + J')$ は対称半正定値
  (I, I' は単位行列) (演習問題)
- $\therefore$ $B \otimes B'$, $B \otimes J'$, $B' \otimes J$ も対称半正定値 (性質 (4))
- $B \otimes B' + B \otimes J' + B' \otimes J$
  $= (B + J) \otimes (B' + J') - J \otimes J'$ (性質 (1))
  $= (\vartheta_2(G)I - A) \otimes (\vartheta_2(G')I' - A') - J \otimes J'$
  $= \vartheta_2(G)\vartheta_2(G')I \otimes I' - (\vartheta_2(G)I \otimes A' + \vartheta_2(G')I' \otimes A - A \otimes A') - J \otimes J'$
  (性質 (1))

最大固有値の最小化：重要な性質 (2) — グラフの積との関係 (続 3)

証明 (続)：

- $B \otimes B' + B \otimes J' + B' \otimes J$
  $= \vartheta_2(G)\vartheta_2(G')I \otimes I' - (\vartheta_2(G)I \otimes A' + \vartheta_2(G')I' \otimes A - A \otimes A') - J \otimes J'$
- ここで，$(\vartheta_2(G)I \otimes A' + \vartheta_2(G')I' \otimes A - A \otimes A')$ は $G \boxtimes G'$ に対する (EIG) の許容解
- $\therefore$ $\Lambda((\vartheta_2(G)I \otimes A' + \vartheta_2(G')I' \otimes A - A \otimes A') + J \otimes J') \leq \vartheta_2(G)\vartheta_2(G')$
- したがって，$\vartheta_2(G \boxtimes G') \leq \vartheta_2(G)\vartheta_2(G')$ □

頂点数 5 の閉路のシャノン容量 (続)

考える行列

$$A + J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & z & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & z & z \\ z & 1 & 1 & 1 & z \\ z & z & 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & z & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{ただし，} z = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$$

- $A + J$ の固有値は $\sqrt{5}$ (重複度 3)，$\dfrac{5 - 3\sqrt{5}}{2} \approx -0.854$ (重複度 2)
- $\therefore$ $A + J$ の最大固有値は $\sqrt{5}$
- $\therefore$ $\Theta(C_5) \leq \vartheta_2(C_5) \leq \sqrt{5}$

結論 (Lovász '79)

$$\Theta(C_5) = \sqrt{5}$$

この講義での証明法は Lovász のものとは異なり，Knuth ('93) を参考にした

シャノン容量と理想グラフではないグラフ

ここまでのまとめ

- $\vartheta(G)$ は多項式時間で計算できるので，
  G が理想グラフであるとき，$\Theta(G)$ も多項式時間で計算できる
- 代表的な理想グラフに対して，シャノン容量が分かる

例えば，$\Theta(K_n) = 1$，$\Theta(K_{m,n}) = \max\{m, n\}$，$\Theta(C_{2k}) = k$ など

残る疑問

- 理想グラフではないグラフのシャノン容量は簡単に計算できるのか？
- 理想グラフではない代表的なグラフのシャノン容量は何なのか？

例えば，$\Theta(C_5) = \sqrt{5}$，$\Theta(C_7) = ???$

未解決問題

$\Theta(C_7)$ を特定せよ

知られている上界

- $\Theta(C_7) < 3.3177$ (Lovász '79: $\vartheta(C_7)$)

知られている下界

- $\Theta(C_7) > 3.2140$ (Baumert, McEliece, Rodemich, Rumsey, Stanley, Taylor '71: $\alpha(C_7^5) \geq 343$)
- $\Theta(C_7) > 3.2237$ (Vesel, Žerovnik '02: $\alpha(C_7^4) \geq 108$)
- $\Theta(C_7) > 3.2271$ (Mathew, Östergård '17: $\alpha(C_7^5) \geq 350$)
- $\Theta(C_7) > 3.2578$ (Polak, Schrijver '19: $\alpha(C_7^5) \geq 367$)

未解決問題：現状

$3.2578 < \Theta(C_7) < 3.3177$