## 離散最適化基礎論　第 10 回
## 楕円体法：応用

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2019 年 1 月 11 日

最終更新：2019 年 1 月 15 日　11:26



### スケジュール 前半





### スケジュール 後半 (予定)



注意：予定の変更もありうる

**評価法に関する変更**

レポートにする予定 (詳細は後日)



### 今日の内容

**今日の内容**

楕円体法を用いて，凸最適化問題を解く手法を理解する

- 凸集合とは？
- 凸集合の例
- 凸集合をアルゴリズムの入力とする方法

**重要な例**

半正定値行列全体の集合



### 目次





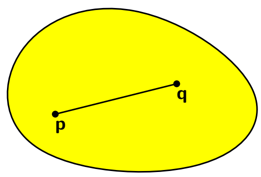
### 凸集合

$X \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$：自然数

**定義：凸集合とは？**

$X$ が凸集合 (convex set) であるとは，
任意の 2 点 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in X$ に対して，次が成り立つこと

$$\lambda \boldsymbol{p} + (1-\lambda)\boldsymbol{q} \in X \qquad (\forall\ \lambda \in [0,1])$$




つまり，任意の 2 点 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in X$ に対して $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ を結ぶ線分が $X$ に含まれる



### 凸集合の例：球体

**凸集合の例 (1)**

閉球体 (closed ball) は凸集合

$$X = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\|^2 \leq 1\}$$

∵ 任意の $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in X$ と任意の $\lambda \in [0,1]$ に対して

$$\begin{aligned}\|\lambda \boldsymbol{p} + (1-\lambda)\boldsymbol{q}\|^2 &= \lambda^2\|\boldsymbol{p}\|^2 + (1-\lambda)^2\|\boldsymbol{q}\|^2 + 2\lambda(1-\lambda)\underbrace{\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}\rangle}_{\text{内積}} \\ &\leq \lambda^2\|\boldsymbol{p}\|^2 + (1-\lambda)^2\|\boldsymbol{q}\|^2 + 2\lambda(1-\lambda)\|\boldsymbol{p}\|\|\boldsymbol{q}\| \\ &\qquad \text{(コーシー・シュワルツの不等式)} \\ &\leq \lambda^2 + (1-\lambda)^2 + 2\lambda(1-\lambda) \qquad (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in X \text{ より}) \\ &= (\lambda + (1-\lambda))^2 = 1\end{aligned}$$



### 凸集合の例：半空間

**凸集合の例 (2)**

閉半空間 (closed halfspace) は凸集合

$$X = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} \leq b\}$$

ただし，$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n - \{\boldsymbol{0}\}$, $b \in \mathbb{R}$

∵ 任意の $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in X$ と任意の $\lambda \in [0,1]$ に対して

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}^\top(\lambda \boldsymbol{p} + (1-\lambda)\boldsymbol{q}) &= \lambda \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{p} + (1-\lambda)\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{q} \\ &\leq \lambda b + (1-\lambda) b = b\end{aligned}$$

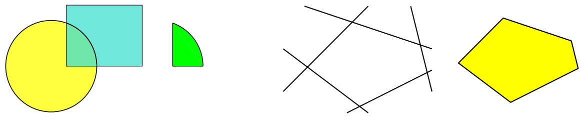
## 凸集合の重要な性質 (1)

$X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$，$n \geq 1$：自然数

**凸集合の重要な性質 (1)**

$X$ と $Y$ が凸集合 $\Rightarrow$ $X \cap Y$ も凸集合

証明は演習問題



**重要な帰結**

凸多面体は凸集合

$\because$ 凸多面体は有限個の閉半空間の共通部分



## 凸集合の重要な性質 (2)：分離定理

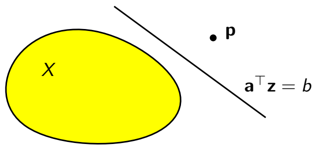
$n \geq 1$：自然数，$X \in \mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$

**凸集合の重要な性質 (2)：分離定理 (separation theorem)**

$X$ が凸集合，$\boldsymbol{p} \notin X$ $\Rightarrow$ ある $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n - \{\boldsymbol{0}\}$ と $b \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} \geq b \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in X, \qquad \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{p} \leq b$$

このような $\boldsymbol{a}, b$ に対して，集合 $\{\boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{z} = b\}$ を分離超平面という




証明は省略 (そう簡単ではない)



## 目次





## 復習：正定値行列

$n \geq 1$：自然数，$V \in \mathbb{R}^{n \times n}$：実対称行列

**定義：正定値行列とは？**

$V$ が正定値行列 (positive definite matrix) であるとは，
任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n - \{\boldsymbol{0}\}$ に対して，次が成り立つこと

$$\boldsymbol{x}^\top V \boldsymbol{x} > 0$$

例：$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ は正定値

$$\because \quad \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3x^2 + 2y^2 + 2xy = 2x^2 + y^2 + (x+y)^2$$



## 復習：正定値行列の性質

$n \geq 1$：自然数，$V \in \mathbb{R}^{n \times n}$：実対称行列

**性質：正定値行列の性質**

次は同値

1. $V$ は正定値
2. $V$ の固有値はすべて正 (注：固有値はすべて実数)
3. 任意の $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して，$\det(V_{JJ}) > 0$
   ただし，$V_{JJ}$ は行添え字を $J$，列添え字を $J$ とする $V$ の小行列
4. ある実行列 $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が存在して，$V = LL^\top$
   ($V$ のコレスキー分解 (Cholesky decomposition))

例：$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値は $\dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{2} > 0$ で，行列式は 5．また，

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{1/3} & \sqrt{5/3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{1/3} \\ 0 & \sqrt{5/3} \end{pmatrix}$$



## 楕円体

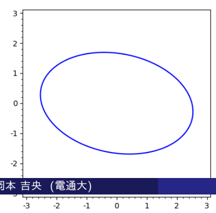
$n \geq 1$：自然数

**定義：楕円体とは？**

$n$ 次元空間における楕円体 (ellipsoid) とは，実対称正定値行列 $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ とベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ を用いて次のように書ける集合

$$\{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n \mid (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x})^\top V^{-1} (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}) \leq 1\}$$

例：$V = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき



**注**

$V$ が実対称正定値 $\Rightarrow$
$V^{-1}$ が存在し，
$V^{-1}$ も実対称正定値



## 楕円体法：基本アイディア

楕円体法は線形計画の許容性判定問題を解く

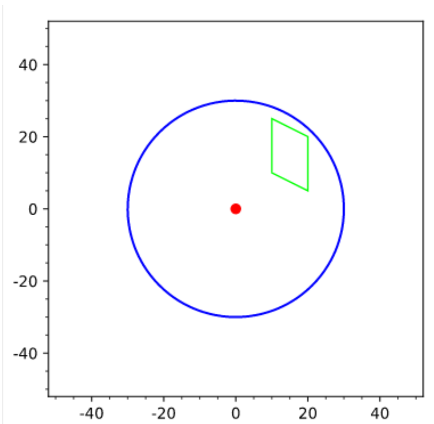
**許容性判定問題とは？**

与えられた凸多面体 $P$ の中の点を 1 つ見つける問題
(凸多面体が空である場合は，空であると判定する問題)

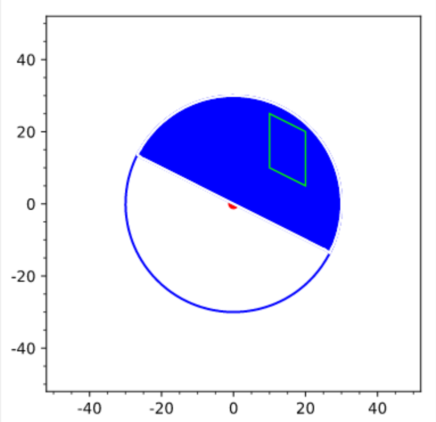
1. $P$ を含む大きな楕円体 $E$ を考える (半径 $R$，原点中心とする球体)
2. $E$ の中心 $\boldsymbol{x}$ が $P$ に含まれていれば，$\boldsymbol{x}$ を返して終了
3. そうでなければ，$P$ を定める不等式の中で，$\boldsymbol{x}$ が違反するものを 1 つ見つける
4. その不等式が定める半空間の境界が $\boldsymbol{x}$ を含むように平行移動する
5. $E$ とその半空間の共通部分を囲む最小体積の楕円体を見つけて，新たに $E$ とする
6. 十分反復しても止まらなければ，空であると判定して終了
   まだ続けるならば， 2 に戻る



## 楕円体法：例 (1)

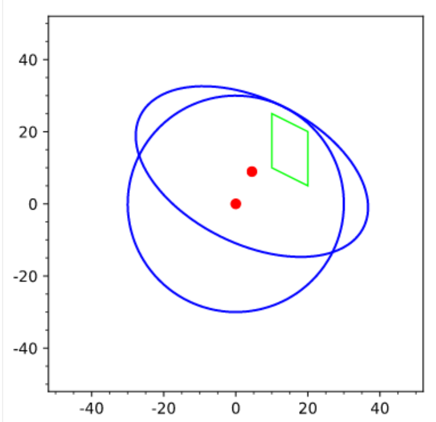


## 楕円体法：例 (2)



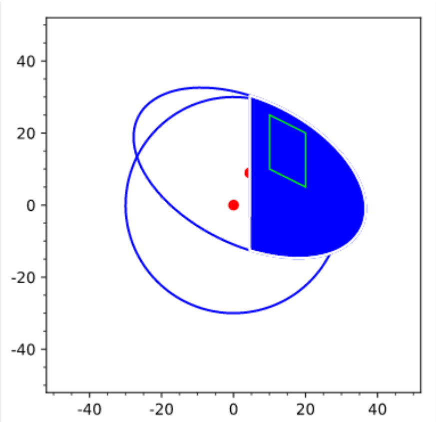



## 楕円体法：例 (3)



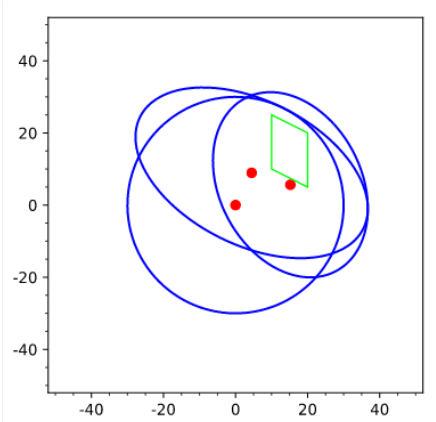



## 楕円体法：例 (4)



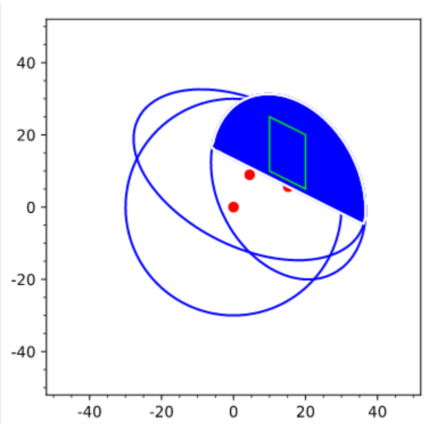



## 楕円体法：例 (5)



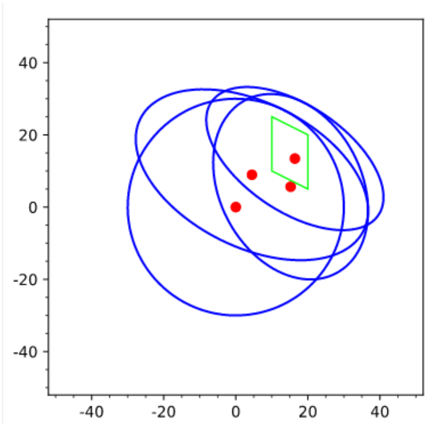



## 楕円体法：例 (6)






## 楕円体法：例 (7)






## 楕円体法：重要な性質

**重要な性質**

考えている楕円体の体積は，楕円体法の 1 回の反復において，
必ず $\mathrm{e}^{-1/(5n)}$ 倍以下になる

- つまり，$N$ 回の反復を繰り返すと，体積は $\mathrm{e}^{-N/(5n)}$ 倍以下になる
- 始めの楕円体の体積は $R^n$

つまり，体積が十分小さい $\varepsilon^n > 0$ になるまでの反復回数 $N$ は次を満たす

$$R^n \cdot \mathrm{e}^{-N/(5n)} \leq \varepsilon^n$$

つまり，$N = O(n^2 \log(R/\varepsilon))$ とすれば楕円体法が “正しく” 動く
(前回の「体積補題」を参照)



## 目次

## 凸計画問題

$X \subseteq \mathbb{R}^n$：凸集合，$n \geq 1$：自然数，$\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$

**凸計画問題とは？**

次の形の最適化問題　　(変数は $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in X \end{array}$$

$X$ が凸多面体であるとき，これは線形計画問題

**注**

これは教科書や論文でよく現れる「凸計画問題」と見た目が違うが，
本質は (さほど) 変わらない



## 凸計画問題と楕円体法

**先に結論**

凸計画問題は (ある仮定を満たせば) 楕円体法で解ける

考えなくてはならないこと

(1) どのように凸集合 $X$ を入力するのか？
(2) どのように最適化問題を許容性判定問題に置き換えるのか？



## 凸計画問題と楕円体法：(1) 凸集合の入力法

凸集合は「分離オラクル」というサブルーチンとして与えられる

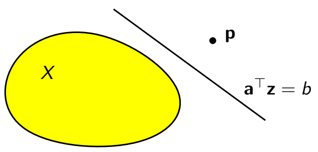
**分離オラクル (separation oracle) とは？**

凸集合 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ に対する分離オラクルとは次を行うアルゴリズム

- 入力：点 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$
- 出力：$\boldsymbol{p} \in X$ ならば，「YES」
  $\boldsymbol{p} \notin X$ ならば，次を満たす $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n - \{\boldsymbol{0}\}$ と $b \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} \geq b \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in X, \qquad \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{p} \leq b$$

分離定理から，そのような $\boldsymbol{a}$, $b$ の存在が保証される






## 凸計画問題と楕円体法：楕円体法がうまく動くための仮定

楕円体法をうまく動かすためには，凸集合 $X$ に仮定が必要

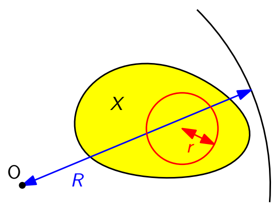
- $X$ は原点中心，半径 $R$ の球体に含まれている

$$X \subseteq \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{z}\| \leq R\}$$

- $X$ は半径 $r$ の球体を含んでいる　　(参照：前回の「体積補題」)

$$\exists\, \boldsymbol{x} \colon \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}\| \leq r\} \subseteq X$$

- アルゴリズムは $R$ と $r$ を知っている






## 凸計画問題と楕円体法：許容性判定問題

今の仮定を使えば，楕円体法で許容性判定問題を解ける

**凸集合に対する許容性判定問題とは？**

- 入力：凸集合 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ (分離オラクルとして)
  ただし，前ページに挙げた仮定を満たす
- 出力：点 $\boldsymbol{p} \in X$

- 分離オラクルと仮定を使うことで，楕円体法を動かすことができる
- 反復回数 $= n^2 \log(R/r)$　　(多項式時間)

注 1：実際は，数値誤差などを考えないといけないので，もっと複雑
注 2：実際は，許容性判定問題を「近似」的にしか解けない



## 凸集合に対する許容性判定問題を解くための楕円体法：考え方

線形計画の場合とほとんど同じ

1. $X$ を含む大きな楕円体 $E$ を考える　(半径 $R$，原点中心とする球体)
2. $E$ の中心 $\boldsymbol{x}$ が $X$ に含まれていれば，$\boldsymbol{x}$ を返して終了
3. そうでなければ，分離オラクルによって，
   $X$ と $\boldsymbol{x}$ に対する分離超平面 $H$ を 1 つ見つける
4. $H$ が $\boldsymbol{x}$ を含むように平行移動する
5. $E$ と $H$ の定める半空間の共通部分を囲む最小体積の楕円体を
   見つけて，新たに $E$ とする
6. 十分反復しても止まらなければ，空であると判定して終了
   まだ続けるならば，2 に戻る



## 凸計画問題と楕円体法：再掲

**先に結論**

凸計画問題は (ある仮定を満たせば) 楕円体法で解ける

考えなくてはならないこと

(1) どのように凸集合 $X$ を入力するのか？ (済)
(2) どのように最適化問題を許容性判定問題に置き換えるのか？



## 凸計画問題と楕円体法：(2) 最適化問題と許容性判定問題

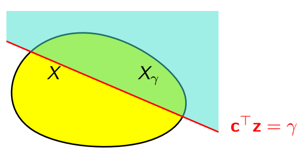
許容性判定問題を使って，凸計画問題 (最適化問題) を解くには？

**解き方：最適値を二分探索によって探す**

- 最適値が $\gamma$ であると推測したとき，次の凸集合を考える

$$X_\gamma = X \cap \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{z} \leq \gamma\}$$

- $X_\gamma \neq \emptyset \Leftrightarrow$ 最適値 $\leq \gamma$
- $X$ が前述の仮定を満たす $\Rightarrow -\|c\|R \leq \gamma \leq \|c\|R$ で $\gamma$ を動かす
- $\therefore$ 二分探索の反復回数 $= O(\log \|c\| R)$




$X_\gamma$ が空集合かどうか調べるために，許容性判定問題を使いたい

## 凸計画問題と楕円体法：(2) 最適化問題と許容性判定問題 (続)

許容性判定問題を使って，凸計画問題 (最適化問題) を解くには？

**問題点**

$X_\gamma$ は半径 $r$ の球体を含まないかもしれない

- しかし，その場合は $X_\gamma$ の体積自体も小さいので，$X_\gamma \approx \emptyset$
- つまり，楕円体法は多項式時間で「近似的に空集合」であると判定可
- これによって，最適化問題は「近似」的に解ける
  (もともと許容性判定も近似的にしかできないので，問題なし)

細かい議論は省略

**結論**

凸計画問題は (与えられる凸集合がある仮定を満たせば)
近似的に多項式時間で解ける

仮定：分離オラクルがある，大きな球体に含まれる，小さな球体を含む



## 凸計画問題と楕円体法：最後の注意

**最後の注意**

一般の凸計画問題に対して，できることはすべて「近似的」

- 近似的な分離オラクル
- 近似的な許容性判定
- 近似的な最適化

多項式時間というときは，次の多項式時間

- (近似的な) 分離オラクルの呼び出し回数
- $n$
- $\mathrm{size}(\boldsymbol{c})$ ($\boldsymbol{c}$ は目的関数の方向)
- $\log(1/\varepsilon)$ ($\varepsilon$ は近似精度)
- $\log(R/r)$ ($R, r$ は仮定に出てくるもの)

ただし，線形計画問題に対してはすべて「厳密」に行える



## 目次





## 半正定値行列全体の集合

**いまからやること**

- 半正定値行列全体の集合は凸集合であることを証明する
- 半正定値行列全体の集合に対する分離オラクルを作る

半正定値行列は最適化，計算理論においてとても重要な役割を持っている



## 復習：半正定値行列

$n \geq 1$：自然数，$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$：実対称行列

**定義：半正定値行列とは？**

$A$ が半正定値行列 (positive semidefinite matrix) であるとは，
任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して，次が成り立つこと

$$\boldsymbol{x}^\top A \boldsymbol{x} \geq 0$$

例：$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は半正定値

$$\because \quad \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2$$

**補足**

実対称行列 $A$ が半正定値であることを「$A \succeq O$」と書くことも多い

$\boxed{\text{注}}$：$A$ が正定値 $\Rightarrow$ $A$ は半正定値



## 復習：半正定値行列の性質

$n \geq 1$：自然数，$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$：実対称行列

**性質：半正定値行列の性質**

次は同値

1. $A$ は半正定値
2. $A$ の固有値はすべて非負 (注：固有値はすべて実数)
3. 任意の $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して，$\det(A_{JJ}) \geq 0$
   ただし，$A_{JJ}$ は行添え字を $J$，列添え字を $J$ とする $A$ の小行列
4. ある実行列 $L \in \mathbb{R}^{n \times r}$ が存在して，$A = LL^\top$
   ただし，$r = \mathrm{rank}\, A$ ($A$ のコレスキー分解 (Cholesky decomposition))

例：$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値は $1, 0$ で，行列式は 0．また，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$



## 半正定値行列全体の集合

$n \geq 1$：自然数

**記法**

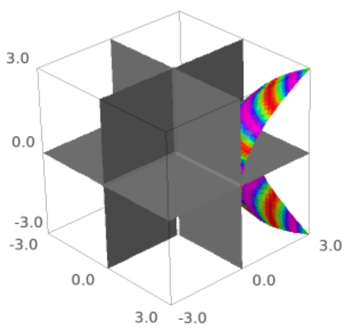
- $\mathcal{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$：$n$ 次実対称行列全体の集合
- $\mathcal{S}^n_+ \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$：$n$ 次実対称半正定値行列全体の集合

例：$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}^2_+$，$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \notin \mathcal{S}^2_+$



## 半正定値行列全体の集合：例

$$\begin{pmatrix} x & z \\ z & y \end{pmatrix} \in \mathcal{S}^2_+ \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 0, y \geq 0, xy - z^2 \geq 0$$



## 半正定値行列全体の集合は凸集合

$n \geq 1$：自然数

**性質：半正定値行列全体の集合は凸集合**

集合 $\mathcal{S}^n_+$ は凸集合

証明：$A, B \in \mathcal{S}^n_+$ とする

- 半正定値行列の定義から，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\boldsymbol{x}^\top A \boldsymbol{x} \geq 0$ かつ $\boldsymbol{x}^\top B \boldsymbol{x} \geq 0$
- $\lambda \in [0,1]$ とすると，証明したいことは 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\boldsymbol{x}^\top (\lambda A + (1-\lambda)B)\boldsymbol{x} \geq 0$
- 実際に式変形をすると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^\top (\lambda A + (1-\lambda)B)\boldsymbol{x} &= \lambda \boldsymbol{x}^\top A \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{x}^\top B \boldsymbol{x} \\ &\geq \lambda \cdot 0 + (1-\lambda) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

が得られる □



## 半正定値行列全体の集合に対する分離オラクル

半正定値行列に対する最適化問題を解くなら，分離オラクルが欲しい

**$\mathcal{S}^n_+$ に対する分離オラクルとは？**

- 入力：実対称行列 $V \in \mathcal{S}^n$
- 出力：$V \in \mathcal{S}^n_+$ ならば，「Yes」
  $V \notin \mathcal{S}^n_+$ ならば，次を満たす行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ と実数 $b \in \mathbb{R}$

$$A \bullet X \geq b \quad \forall\, X \in \mathcal{S}^n_+, \qquad A \bullet V \leq b$$

ただし，$A \bullet X = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} X_{ij} = \mathrm{tr}(A^\top X)$ (行列に対する内積)

$$\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} x & z \\ z & y \end{pmatrix}\right) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} ax+cz & az+cy \\ cx+bz & cz+by \end{pmatrix}\right) = ax + 2cz + by$$



## 半正定値行列全体の集合に対する分離オラクルの構成 (1)

**構成法のアイディア**

入力 $V$ の最小固有値 $\lambda_{\min}$ を求めてみる

1. $\lambda_{\min} \geq 0 \Rightarrow V$ は半正定値 (YES と出力)
2. $\lambda_{\min} < 0 \Rightarrow V$ は半正定値ではない
   - このときに，$\boldsymbol{x}^\top V \boldsymbol{x} < 0$ となる $\boldsymbol{x}$ を見つける

例：$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ の特性方程式は $(\lambda - 1)^2 - 4 = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$ なので，
固有値は $3, -1$



## 半正定値行列全体の集合に対する分離オラクルの構成 (2)

**構成法のアイディア (続き)**

$\boldsymbol{x}$ を最小固有値 $\lambda_{\min} < 0$ に関する固有ベクトルとする

- このとき，$\boldsymbol{x}^\top V \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^\top \lambda_{\min} \boldsymbol{x} = \lambda_{\min} \|\boldsymbol{x}\|^2 < 0$
- 一方，任意の半正定値行列 $X \in \mathcal{S}^n_+$ に対して $\boldsymbol{x}^\top X \boldsymbol{x} \geq 0$
- ここで，$\boldsymbol{x}^\top X \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top) \bullet X$ なので，$A = \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top$，$b = 0$ とすればよい

例：$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値 $-1$ に関する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
つまり，分離超平面は次の式で与えられる

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = x_{11} + x_{22} - 2x_{12} = 0$$



## 半正定値行列全体の集合に対する分離オラクルの構成 (3)

**構成法のアイディア (続き)**

固有値を求めるアルゴリズムはたくさん知られている

- 例えば，QR アルゴリズムを使えば，
  精度よく，多項式時間ですべての固有値と固有ベクトルを計算可能

このような話は『数値計算』,『数値解析』,『HPC』で扱うものなので
ここでは省略



## 目次





## 今日の内容

**今日の内容**

楕円体法を用いて，凸最適化問題を解く手法を理解する

- 凸集合とは？
- 凸集合の例
- 凸集合をアルゴリズムの入力とする方法

**重要な例**

半正定値行列全体の集合

**次回の予告**

半正定値行列を組合せ最適化に応用していく