## 離散最適化基礎論　第 6 回
## 組合せ最適化と線形計画法

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2018 年 11 月 16 日

最終更新：2018 年 11 月 16 日　11:48



## スケジュール 前半 (予定)

1. 理想グラフと組合せ最適化 (10/5)
2. 代表的な理想グラフ (1)：二部グラフと二部グラフの線グラフ (10/12)
3. 代表的な理想グラフ (2)：二部グラフの補グラフ (10/19)
4. 代表的な理想グラフ (3)：区間グラフと弦グラフ (10/26)
- ⋆ 出張のため休講 (11/2)
5. 弱理想グラフ定理 (1)：グラフ理論的手法 (11/9)
6. 組合せ最適化と線形計画法 (11/16)
- ⋆ 調布祭 のため 休み (11/23)
7. 凸多面体の基礎 (11/30)
8. 弱理想グラフ定理 (2)：多面体的手法 (12/7)

注意：予定の変更もありうる



## スケジュール 後半 (予定)

9. 楕円体法 (1)：基礎 (12/14)
10. 楕円体法 (2)：アルゴリズム (12/21)
11. 組合せ最適化と半正定値計画法 (1/11)
- ⋆ センター試験準備 のため 休み (1/18)
12. グラフのシャノン容量 (1/25)
13. 理想グラフに対するアルゴリズム (2/1)
14. 予備？ (2/8)
- ⋆ 期末試験 (2/15？)

注意：予定の変更もありうる



## 今日の内容

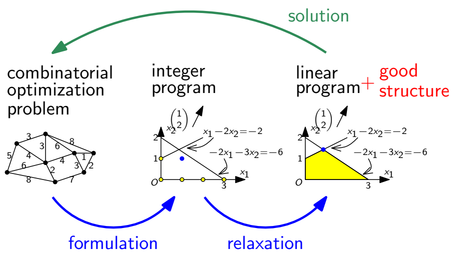
**今日の内容**

線形計画法を通して組合せ最適化を理解する
- 整数計画問題と線形計画緩和
- 双対理論
- 多面体の整数性

**重要概念**
- 充填型整数計画問題と被覆型整数計画問題
- 分数染色数



## 数理計画法による組合せ最適化問題の解法：一般論




- 組合せ最適化問題を整数計画問題として定式化
- 整数計画問題を線形計画問題として緩和
- 線形計画問題の「よい」構造を観察
- 線形計画問題を用いて組合せ最適化問題の解決



## 目次

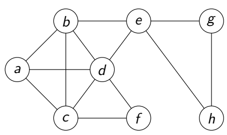




## 今から行うこと

**目標**

最大独立集合問題を整数計画問題として定式化する






## 最適化モデル作成のポイント

**最適化モデル作成のポイント：基礎**

次を明確にする
- 変数は何か？ 何を変数は表すのか？
- 目的関数は何か？ 何を最適化するのか？
- 制約は何か？ 何を制約は表すのか？

## 最大独立集合問題：変数

**決定すべきこと：どの頂点を選ぶか (選択)**

- 各頂点 $v \in V$ に対して
$$x_v \in \{0, 1\}$$
という変数を設定する

- 解釈：
$$\begin{cases} x_v = 0 & \Leftrightarrow \quad \text{頂点 } v \text{ を選ばない} \\ x_v = 1 & \Leftrightarrow \quad \text{頂点 } v \text{ を選ぶ} \end{cases}$$
- 変数の数 $= |V|$ (頂点の数)

**ポイント**

01 変数で「選択」を表現する

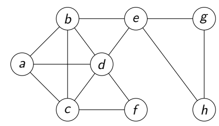


## 最大独立集合問題：目的関数

**最大化するもの：独立集合の要素数**

- 目的は
$$\text{maximize} \quad \sum_{v \in V} x_v$$

考え方
- 頂点 $v \in V$ を選ぶと，要素数が 1 だけ増える
- 目的関数 ＝ 選ばれた頂点の総数




$x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f, x_g, x_h \in \mathbb{R}$ を変数として，目的関数は
$$x_a + x_b + x_c + x_d + x_e + x_f + x_g + x_h$$

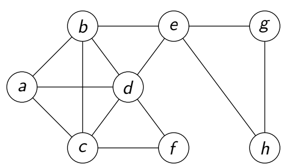


## 最大独立集合問題：制約

**制約：選ばれた頂点全体が独立集合になる**

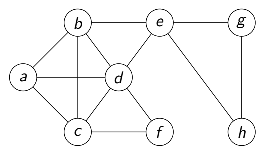
- 各辺 $\{u, v\} \in E$ に対して
$$x_u + x_v \leq 1$$

考え方
- $I \subseteq V$ が独立集合 $\Leftrightarrow$ どの辺からも 1 頂点しか選ばれない






## 最大独立集合問題：定式化の例




$x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f, x_g, x_h \in \mathbb{R}$ を変数として
$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & x_a + x_b + x_c + x_d + x_e + x_f + x_g + x_h \\ \text{subject to} \quad & x_a + x_b \leq 1, x_a + x_c \leq 1, x_a + x_d \leq 1, \\ & x_b + x_c \leq 1, x_b + x_d \leq 1, x_b + x_e \leq 1, \\ & x_c + x_d \leq 1, x_c + x_f \leq 1, \\ & x_d + x_e \leq 1, x_d + x_f \leq 1, \\ & x_e + x_g \leq 1, x_e + x_h \leq 1, x_g + x_h \leq 1, \\ & x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f, x_g, x_h \in \{0, 1\} \end{aligned}$$



## 最大独立集合問題：定式化 1

**最大独立集合問題：整数計画問題としての定式化 1**

$x \in \mathbb{R}^V$ は変数
$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{subject to} \quad & x_u + x_v \leq 1 \qquad (\forall \{u, v\} \in E), \\ & x_v \in \{0, 1\} \qquad (\forall v \in V) \end{aligned}$$

これは最大独立集合問題の正しい定式化



## 整数計画問題として書けると何がよいか？

**利点**

- ソルバーを用いて解けるようになる
- いろいろな問題を統一的に扱えるようになる

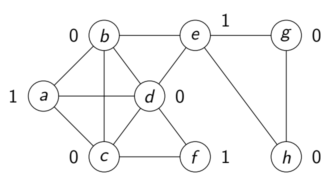
**難点**

- 問題が簡単になるわけではない
(同じ問題の「表現」を変えただけ)

『計算理論』のことばを借りれば，整数計画問題は NP 困難



## 最大独立集合問題：定式化の例 — 解いてみた

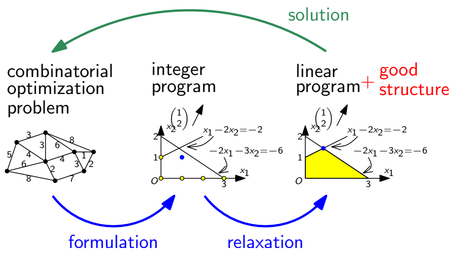



- 最適解 (の 1 つ)
$$(x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f, x_g, x_h) = (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0)$$
- 最適値は 3
- これは最大独立集合に対応



## 目次

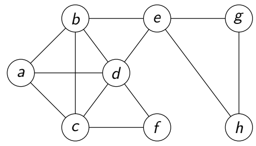
## 数理計画法による組合せ最適化問題の解法：一般論 (再掲)




- 組合せ最適化問題を整数計画問題として定式化
- 整数計画問題を線形計画問題として緩和
- 線形計画問題の「よい」構造を観察
- 線形計画問題を用いて組合せ最適化問題の解決



## 最大独立集合問題：定式化 1 の線形計画緩和 (例)




$x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f, x_g, x_h \in \mathbb{R}$ を変数として

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & x_a + x_b + x_c + x_d + x_e + x_f + x_g + x_h \\
\text{subject to} & x_a + x_b \le 1, x_a + x_c \le 1, x_a + x_d \le 1, \\
& x_b + x_c \le 1, x_b + x_d \le 1, x_b + x_e \le 1, \\
& x_c + x_d \le 1, x_c + x_f \le 1, \\
& x_d + x_e \le 1, x_d + x_f \le 1, \\
& x_e + x_g \le 1, x_e + x_h \le 1, x_g + x_h \le 1, \\
& x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f, x_g, x_h \ge 0
\end{array}
$$



## 最大独立集合問題：定式化 1 の線形計画緩和

**最大独立集合問題：整数計画問題としての定式化 1 の線形計画緩和**

$x \in \mathbb{R}^V$ は変数

$$
\begin{array}{lll}
\text{maximize} & \sum_{v \in V} x_v & \\
\text{subject to} & x_u + x_v \le 1 & (\forall \{u, v\} \in E), \\
& x_v \ge 0 & (\forall v \in V)
\end{array}
$$

- これは最大独立集合問題の正しい定式化ではない
- これは線形計画問題

線形計画緩和の作り方：$x \in \{0, 1\} \rightsquigarrow x \ge 0$



## 線形計画緩和を考えると何がよいか？

**難点**

- 解いても，もとの問題が解けるわけではない

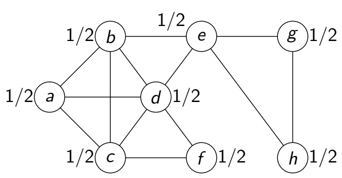
**利点**

- 実をいうと，整数計画問題を解くときに使っている
- 多項式時間で解くことができる (ことが多い)
- ときには，もとの問題を解くことができる

『計算理論』のことばを借りれば，線形計画問題は P に属する問題



## 最大独立集合問題：定式化の線形計画緩和の例 — 解いてみた




- 最適解 (の 1 つ)

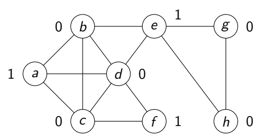
$$(x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f, x_g, x_h) = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$$

- 最適値は 4
- これは最大独立集合に対応しない

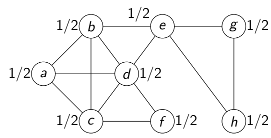


## 何が起きているのか？

整数計画問題




線形計画緩和




- $x$ が整数計画問題の解 $\Rightarrow$ $x$ は線形計画緩和の解
  (解 $=$ 制約を満たすベクトル)
  - 逆は正しくない (正しいとは限らない)
- 整数計画問題の最適値 $\le$ 線形計画緩和の最適値



## 何が起きているのか？ — 図が描ける別の例 (1)

**整数計画問題**

$x_a, x_b, x_c \in \mathbb{R}$ を変数として

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & x_a + x_b + x_c \\
\text{subject to} & x_a + x_b \le 1, \\
& x_a + x_c \le 1, \\
& x_b + x_c \le 1, \\
& x_a, x_b, x_c \in \{0, 1\}
\end{array}
$$

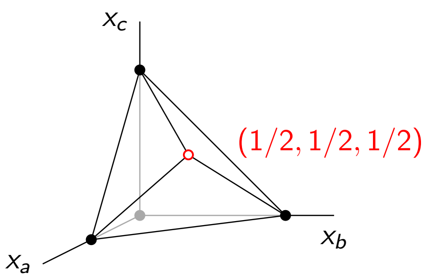
**線形計画緩和**

$x_a, x_b, x_c \in \mathbb{R}$ を変数として

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & x_a + x_b + x_c \\
\text{subject to} & x_a + x_b \le 1, \\
& x_a + x_c \le 1, \\
& x_b + x_c \le 1, \\
& x_a, x_b, x_c \ge 0
\end{array}
$$



## 何が起きているのか？ — 図が描ける別の例 (2)




- 整数計画問題は黒点 4 つの中で最適化
- 線形計画緩和は多面体の上で最適化
- 状況：多面体が黒点以外の頂点を持っている

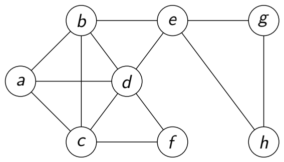
## 行うこと — 緩和の強化

ここで，定式化を見直す

- 独立集合はクリークから 1 頂点しか選べない
- 例えば，$x_a, x_b, \ldots, x_h$ が独立集合に対応するならば，次を満たす

$$x_e + x_g + x_h \leq 1$$

- そのような不等式をすべてのクリークに対して考える






## 最大独立集合問題：定式化 2

**最大独立集合問題：整数計画問題としての定式化 2**

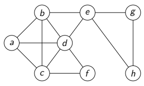
$x \in \mathbb{R}^V$ は変数

$$\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & \sum_{v \in V} x_v \\
\text{subject to} \quad & x_u + x_v \leq 1 && (\forall \{u,v\} \in E), \\
& \sum_{v \in C} x_v \leq 1 && (\forall\, C \subseteq V,\ \text{クリーク}), \\
& x_v \in \{0,1\} && (\forall\, v \in V)
\end{aligned}$$

これは最大独立集合問題の正しい定式化



## 最大独立集合問題：定式化 2 の例

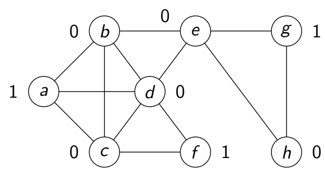


$x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f, x_g, x_h \in \mathbb{R}$ を変数として

$$\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & x_a + x_b + x_c + x_d + x_e + x_f + x_g + x_h \\
\text{subject to} \quad & x_a + x_b \leq 1, x_a + x_c \leq 1, x_a + x_d \leq 1, x_b + x_c \leq 1, \\
& x_b + x_d \leq 1, x_b + x_e \leq 1, x_c + x_d \leq 1, x_c + x_f \leq 1, \\
& x_d + x_e \leq 1, x_d + x_f \leq 1, x_e + x_g \leq 1, x_e + x_h \leq 1, \\
& x_g + x_h \leq 1, x_a + x_b + x_c + x_d \leq 1, x_a + x_b + x_c \leq 1, \\
& x_a + x_b + x_d \leq 1, x_a + x_c + x_d \leq 1, x_b + x_c + x_d \leq 1, \\
& x_b + x_d + x_e \leq 1, x_c + x_d + x_f \leq 1, x_e + x_g + x_h \leq 1, \\
& x_a \leq 1, x_b \leq 1, x_c \leq 1, x_d \leq 1, x_e \leq 1, x_f \leq 1, x_g \leq 1, x_h \leq 1, \\
& x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f, x_g, x_h \in \{0,1\}
\end{aligned}$$



## 最大独立集合問題：定式化 2 の例 — 解いてみた




- 最適解 (の 1 つ)

$$(x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f, x_g, x_h) = (1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0)$$

- 最適値は 3
- これは最大独立集合に対応



## 最大独立集合問題：定式化 2 の線形計画緩和

**最大独立集合問題：整数計画問題としての定式化 2 の線形計画緩和**

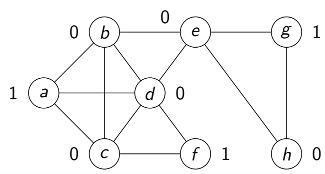
$x \in \mathbb{R}^V$ は変数

$$\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & \sum_{v \in V} x_v \\
\text{subject to} \quad & x_u + x_v \leq 1 && (\forall \{u,v\} \in E), \\
& \sum_{v \in C} x_v \leq 1 && (\forall\, C \subseteq V,\ \text{クリーク}), \\
& x_v \geq 0 && (\forall\, v \in V)
\end{aligned}$$

これは最大独立集合問題の正しい定式化ではない



## 最大独立集合問題：定式化 2 の線形計画緩和の例 — 解いてみた




- 最適解 (の 1 つ)

$$(x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f, x_g, x_h) = (1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0)$$

- 最適値は 3
- これは最大独立集合に対応!!!



## 何が起きているのか？ — 図が描ける別の例 (3)

**整数計画問題 (定式化 2)**

$x_a, x_b, x_c \in \mathbb{R}$ を変数として

$$\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & x_a + x_b + x_c \\
\text{subject to} \quad & x_a + x_b \leq 1, \\
& x_a + x_c \leq 1, \\
& x_b + x_c \leq 1, \\
& x_a + x_b + x_c \leq 1, \\
& x_a, x_b, x_c \leq 1, \\
& x_a, x_b, x_c \in \{0,1\}
\end{aligned}$$

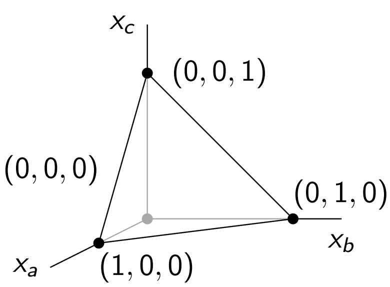
**線形計画緩和 (定式化 2)**

$x_a, x_b, x_c \in \mathbb{R}$ を変数として

$$\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & x_a + x_b + x_c \\
\text{subject to} \quad & x_a + x_b \leq 1, \\
& x_a + x_c \leq 1, \\
& x_b + x_c \leq 1, \\
& x_a + x_b + x_c \leq 1, \\
& x_a, x_b, x_c \leq 1, \\
& x_a, x_b, x_c \geq 0
\end{aligned}$$



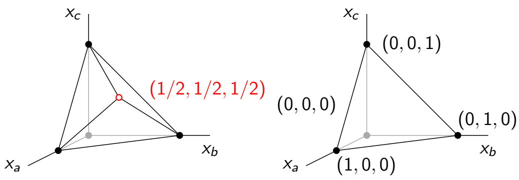
## 何が起きているのか？ — 図が描ける別の例 (4)




- 付け加えられた制約により，多面体の形が変わる
- 多面体の頂点も変わる
- 状況：多面体が黒点以外の頂点を持っていない

## 何が起きているのか？ — 図が描ける別の例 (5)

比較






## 理想グラフと定式化 2

**定理** (Chvátal '75, Fulkerson '71)

$G$ が理想グラフ $\Leftrightarrow$
定式化 2 の線形計画緩和が定める多面体の頂点がどれも $G$ の独立集合に対応

- これを用いて，弱理想グラフ定理の証明ができる
- 証明は次々回の予定



## 目次





## 行列を用いて書く

**整数計画問題**

$x_a, x_b, x_c \in \mathbb{R}$ を変数として

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & x_a + x_b + x_c \\ \text{subject to} & x_a + x_b \le 1, \\ & x_a + x_c \le 1, \\ & x_b + x_c \le 1, \\ & x_a, x_b, x_c \in \{0, 1\} \end{array}$$

**行列を用いて書く**

$x_a, x_b, x_c \in \mathbb{R}$ を変数として

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix} \\ \text{subject to} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix} \in \{0, 1\}^3 \end{array}$$



## 充填型整数計画問題

設定
- $m, n \ge 1$：自然数
- $A \in \{0, 1\}^{m \times n}$：01 行列

**考える問題：(P)**

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \mathbf{1}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \le \mathbf{1}, \\ & \boldsymbol{x} \in \{0, 1\}^n \end{array}$$

このように書ける整数計画問題を充填型整数計画問題と呼ぶ
- 最大独立集合問題に対する定式化 1，定式化 2 は
どちらも充填型整数計画問題

充填 (じゅうてん) = packing



## 充填型整数計画問題の線形計画緩和

設定
- $m, n \ge 1$：自然数
- $A \in \{0, 1\}^{m \times n}$：01 行列

**(P) の線形計画緩和：(LP)**

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \mathbf{1}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \le \mathbf{1}, \\ & \boldsymbol{x} \ge \mathbf{0} \end{array}$$



## (P) と (LP) の関係 (1)

**充填型：(P)**

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \mathbf{1}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \le \mathbf{1}, \\ & \boldsymbol{x} \in \{0, 1\}^n \end{array}$$

**(P) の線形計画緩和：(LP)**

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \mathbf{1}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \le \mathbf{1}, \\ & \boldsymbol{x} \ge \mathbf{0} \end{array}$$

**性質 1**

(P) の許容解 は (LP) の許容解

(P) の制約を満たす $\boldsymbol{x}$ は (LP) の制約も満たす



## (P) と (LP) の関係 (2)

**充填型：(P)**

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \mathbf{1}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \le \mathbf{1}, \\ & \boldsymbol{x} \in \{0, 1\}^n \end{array}$$

**(P) の線形計画緩和：(LP)**

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \mathbf{1}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \le \mathbf{1}, \\ & \boldsymbol{x} \ge \mathbf{0} \end{array}$$

**性質 2**

(P) の最適値 $\le$ (LP) の最適値

$\because$ 性質 1 より，(P) の最適解は (LP) の許容解であるから

## (P) と (LP) の関係 (3)

**充填型：(P)**

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \mathbf{1}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \le \mathbf{1}, \\ & \boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n \end{array}$$

**(P) の線形計画緩和：(LP)**

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \mathbf{1}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \le \mathbf{1}, \\ & \boldsymbol{x} \ge \mathbf{0} \end{array}$$

**性質 3**

(LP) の最適解 $\boldsymbol{x}$ が (P) の許容解 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{x}$ は (P) の最適解

$\because$ (LP) の最適値 $\overset{\text{仮定}}{\le}$ (P) の最適値 $\overset{\text{性質 2}}{\le}$ (LP) の最適値



## 被覆型整数計画問題

設定

- $m, n \ge 1$：自然数
- $A \in \{0,1\}^{m\times n}$：01 行列

**考える問題：(C)**

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \mathbf{1}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{subject to} & A^\top \boldsymbol{y} \ge \mathbf{1}, \\ & \boldsymbol{y} \in \{0,1\}^m \end{array}$$

このように書ける整数計画問題を被覆型整数計画問題と呼ぶ

被覆 $=$ covering



## 被覆型整数計画問題の線形計画緩和

設定

- $m, n \ge 1$：自然数
- $A \in \{0,1\}^{m\times n}$：01 行列

**(C) の線形計画緩和：(LC)**

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \mathbf{1}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{subject to} & A^\top \boldsymbol{y} \ge \mathbf{1}, \\ & \boldsymbol{y} \ge \mathbf{0} \end{array}$$



## (C) と (LC) の関係

**被覆型：(C)**

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \mathbf{1}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{subject to} & A^\top \boldsymbol{y} \ge \mathbf{1}, \\ & \boldsymbol{y} \in \{0,1\}^m \end{array}$$

**(C) の線形計画緩和：(LC)**

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \mathbf{1}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{subject to} & A^\top \boldsymbol{y} \ge \mathbf{1}, \\ & \boldsymbol{y} \ge \mathbf{0} \end{array}$$

性質 (証明は演習問題)

- (C) の許容解 は (LC) の許容解
- (C) の最適値 $\ge$ (LC) の最適値
- (LC) の最適解 $\boldsymbol{y}$ が (C) の許容解 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{y}$ は (C) の最適解



## (LP) と (LC) の関係

**(P) の線形計画緩和：(LP)**

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \mathbf{1}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \le \mathbf{1}, \\ & \boldsymbol{x} \ge \mathbf{0} \end{array}$$

**(C) の線形計画緩和：(LC)**

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \mathbf{1}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{subject to} & A^\top \boldsymbol{y} \ge \mathbf{1}, \\ & \boldsymbol{y} \ge \mathbf{0} \end{array}$$

**性質 (重要)**

$\boldsymbol{x}$ が (LP) の許容解，$\boldsymbol{y}$ が (LC) の許容解 $\Rightarrow$ $\mathbf{1}^\top \boldsymbol{x} \le \mathbf{1}^\top \boldsymbol{y}$

$\because$ $\mathbf{1}^\top \boldsymbol{x} \le (A^\top \boldsymbol{y})^\top \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^\top A \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{y}^\top \mathbf{1} = \mathbf{1}^\top \boldsymbol{y}$

**特に**

(LP) の最適値 $\le$ (LC) の最適値

実は，線形計画法の双対定理より，(LP) の最適値 $=$ (LC) の最適値



## ここまでのまとめ

**充填型：(P)**

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \mathbf{1}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \le \mathbf{1}, \\ & \boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n \end{array}$$

**(P) の線形計画緩和：(LP)**

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \mathbf{1}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \le \mathbf{1}, \\ & \boldsymbol{x} \ge \mathbf{0} \end{array}$$

**被覆型：(C)**

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \mathbf{1}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{subject to} & A^\top \boldsymbol{y} \ge \mathbf{1}, \\ & \boldsymbol{y} \in \{0,1\}^m \end{array}$$

**(C) の線形計画緩和：(LC)**

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \mathbf{1}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{subject to} & A^\top \boldsymbol{y} \ge \mathbf{1}, \\ & \boldsymbol{y} \ge \mathbf{0} \end{array}$$

**ここまでのまとめ**

- (P) の最適値 $\le$ (LP) の最適値 $\le$ (LC) の最適値 $\le$ (C) の最適値
- 最大独立集合問題は (P) の形式をしている

疑問：(C) はどんな組合せ最適化問題に対応しているのか？



## 目次





## (C) を作る：例

**整数計画問題 (定式化 2)**

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & x_a + x_b + x_c \\ \text{subject to} & x_a + x_b \le 1, x_a + x_c \le 1, x_b + x_c \le 1, x_a + x_b + x_c \le 1, \\ & x_a \le 1, x_b \le 1, x_c \le 1, \quad x_a, x_b, x_c \in \{0,1\} \end{array}$$

行列で書くと，

$$\text{maximize} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix}$$

$$\text{subject to} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix} \in \{0,1\}^3$$

## (C) を作る：例 (続き)

ここから (C) を作る (変数を $y_A, y_B, y_C, y_D, y_E, y_F, y_G$ とする)

$$\text{minimize} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_A \\ y_B \\ y_C \\ y_D \\ y_E \\ y_F \\ y_G \end{pmatrix}$$

制約は次のページ



## (C) を作る：例 (続き 2)

$$\text{subject to} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_A \\ y_B \\ y_C \\ y_D \\ y_E \\ y_F \\ y_G \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y_A \\ y_B \\ y_C \\ y_D \\ y_E \\ y_F \\ y_G \end{pmatrix} \in \{0,1\}^7$$



## (C) を作る：例 (続き 3)

行列を使わずに書くと

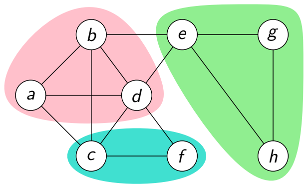
$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & y_A + y_B + y_C + y_D + y_E + y_F + y_G \\ \text{subject to} \quad & y_A + y_B + y_D + y_E \geq 1, \\ & y_A + y_C + y_D + y_F \geq 1, \\ & y_B + y_C + y_D + y_G \geq 1, \\ & y_A, y_B, y_C, y_D, y_E, y_F, y_G \in \{0,1\} \end{aligned}$$

- $A, B, C, D, E, F, G$ はグラフのクリークに対応
- クリークを選んで，頂点を覆う
- そのときに，使用するクリークの数を最小化

$\rightsquigarrow$ 最小クリーク分割問題



## 最小クリーク分割問題




これは，補グラフに対する最小彩色問題 (染色数の計算)

**ここまでのまとめ**

- $\alpha(G) =$ (P) の最適値 $\leq$ (C) の最適値 $= \chi(\overline{G})$

つまり，補グラフを考えれば，

- $\omega(G) =$ (P) の最適値 $\leq$ (C) の最適値 $= \chi(G)$

見慣れた不等式が出てきた



## まとめ：最小彩色問題の整数計画問題による定式化

$G$ の染色数は，次の最適化問題の最適値

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_{S \in \mathcal{I}} y_S \\ \text{subject to} \quad & \sum_{S \colon v \in S \in \mathcal{I}} y_S \geq 1 \qquad (\forall\, v \in V), \\ & y_S \in \{0,1\} \qquad (\forall\, S \in \mathcal{I}) \end{aligned}$$

ただし，$\mathcal{I}$ は $G$ の独立集合を全部集めた集合族



## 最小彩色問題の整数計画問題による定式化の線形計画緩和

その線形計画緩和の最適値を $G$ の分数染色数と呼ぶ

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_{S \in \mathcal{I}} y_S \\ \text{subject to} \quad & \sum_{S \colon v \in S \in \mathcal{I}} y_S \geq 1 \qquad (\forall\, v \in V), \\ & y_S \geq 0 \qquad (\forall\, S \in \mathcal{I}) \end{aligned}$$

- 分数染色数 = fractional chromatic number
- 分数染色数は $\chi_f(G)$ (または，$\chi^*(G)$) で表す
- いままでの議論より，次が成り立つ

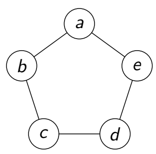
$$\omega(G) \leq \chi_f(G) \leq \chi(G)$$

- $\therefore$ $G$ が理想グラフ $\Rightarrow \omega(G) = \chi_f(G) = \chi(G)$



## 分数染色数：例 (1)

頂点数 5 の閉路の分数染色数は？




まず，線形計画緩和 (LC) を書き下す

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & y_a + y_b + y_c + y_d + y_e + y_{ac} + y_{ad} + y_{bd} + y_{be} + y_{ce} \\ \text{subject to} \quad & y_a + y_{ac} + y_{ad} \geq 1, y_b + y_{bd} + y_{be} \geq 1, \\ & y_c + y_{ac} + y_{ce} \geq 1, y_d + y_{ad} + y_{bd} \geq 1, \\ & y_e + y_{be} + y_{ce} \geq 1, \\ & y_a, y_b, y_c, y_d, y_e, y_{ac}, y_{ad}, y_{bd}, y_{be}, y_{ce} \geq 0 \end{aligned}$$



## 分数染色数：例 (2)

線形計画緩和 (LC) の許容解を 1 つ見つける

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & y_a + y_b + y_c + y_d + y_e + y_{ac} + y_{ad} + y_{bd} + y_{be} + y_{ce} \\ \text{subject to} \quad & y_a + y_{ac} + y_{ad} \geq 1, y_b + y_{bd} + y_{be} \geq 1, \\ & y_c + y_{ac} + y_{ce} \geq 1, y_d + y_{ad} + y_{bd} \geq 1, \\ & y_e + y_{be} + y_{ce} \geq 1, \\ & y_a, y_b, y_c, y_d, y_e, y_{ac}, y_{ad}, y_{bd}, y_{be}, y_{ce} \geq 0 \end{aligned}$$

- 例えば，$(y_a, y_b, y_c, y_d, y_e, y_{ac}, y_{ad}, y_{bd}, y_{be}, y_{ce}) = (0, 0, 0, 0, 0, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$
- この許容解から，$\chi_f(G) \leq 5/2$ が分かる

## 分数染色数：例 (3)

対応する充填型整数計画問題の線形計画緩和 (LP) を書き下す

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & x_a + x_b + x_c + x_d + x_e \\
\text{subject to} & x_a + x_c \le 1, x_a + x_d \le 1, x_b + x_d \le 1, \\
& x_b + x_e \le 1, x_c + x_e \le 1, \\
& x_a \le 1, x_b \le 1, x_c \le 1, x_d \le 1, x_e \le 1, \\
& x_a, x_b, x_c, x_d, x_e \ge 0
\end{array}
$$

- 例えば，$(x_a, x_b, x_c, x_d, x_e) = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$ は この (LP) の許容解で，目的関数値は $5/2$
- $\therefore \chi_f(G) \ge 5/2$ が分かる
- $\therefore \chi_f(G) = 5/2$ □



## 目次





## 今日の内容

### 今日の内容

線形計画法を通して組合せ最適化を理解する

- 整数計画問題と線形計画緩和
- 双対理論
- 多面体の整数性

### 重要概念

- 充填型整数計画問題と被覆型整数計画問題
- 分数染色数

### 次回の予告

凸多面体に関する基礎事項