離散最適化基礎論　第 4 回
代表的な理想グラフ (3)：区間グラフと弦グラフ

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2018 年 10 月 26 日

最終更新：2018 年 10 月 26 日　15:59

スケジュール 前半 (予定)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

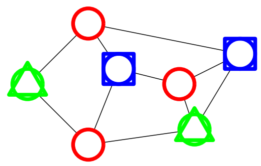
注意：予定の変更もありうる

染色数

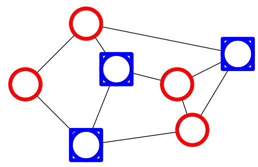
グラフ $G = (V, E)$

定義：染色数とは？
G の染色数とは，G の k 彩色が存在するような最小の k

G の染色数を $\chi(G)$ で表す



3 彩色である



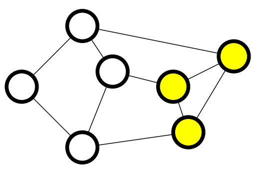
2 彩色は存在しない

∴ このグラフの染色数は 3

クリーク

定義：グラフのクリークとは？
グラフ G のクリークとは，頂点部分集合 C で，
その中のどの 2 頂点も辺で結ばれているもの

クリークの頂点数の最大値を $\omega(G)$ で表す (G のクリーク数と呼ぶ)



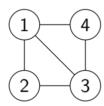
観察 (弱双対性)
任意のグラフ G に対して
- $\chi(G) \geq \omega(G)$

理想グラフ

グラフ $G = (V, E)$

定義：理想グラフとは？
G が理想グラフであるとは，次が成り立つこと

$$\chi(H) = \omega(H) \qquad \forall \text{ 誘導部分グラフ } H \subseteq G$$



今日の内容

前回までの内容
代表的な理想グラフの紹介
- 二部グラフ (簡単)
- 二部グラフの線グラフ (Kőnig の定理)
- 二部グラフの補グラフ (Kőnig–Egerváry の定理)
- 二部グラフの線グラフの補グラフ (Kőnig–Egerváry の定理)

今日の内容
代表的な理想グラフの紹介
- 区間グラフ (interval graph)
- 弦グラフ (chordal graph)

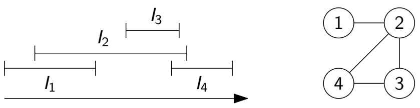
目次

区間グラフとは？

$\mathcal{I} = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ 閉区間の集合 ($I_i \subseteq \mathbb{R}$)

定義：区間グラフとは？

$\mathcal{I}$ が定義する区間グラフ $G(\mathcal{I})$ とは，次のグラフ
- 頂点集合は $\{1, 2, \ldots, n\}$
- 辺集合は $\{\{i, j\} \mid I_i \cap I_j \neq \emptyset\}$ (交わる区間対が辺に対応)

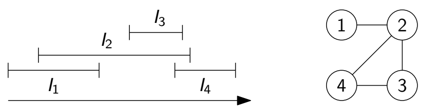


区間グラフ：$G = G(\mathcal{I})$ となる閉区間の集合 $\mathcal{I}$ が存在するグラフ G

区間グラフは理想グラフ

今から証明すること

区間グラフは理想グラフである



この例では，染色数 $= 3 =$ クリーク数

証明の流れ

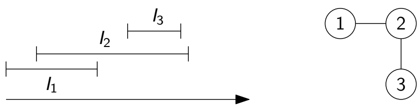
1. 区間グラフの誘導部分グラフも区間グラフ (区間グラフの遺伝性)
2. 区間グラフにおいて，染色数 $=$ クリーク数

区間グラフの遺伝性

性質：区間グラフの遺伝性

G が区間グラフである $\Rightarrow$ G の誘導部分グラフ H も区間グラフ

証明：G が閉区間の集合 $\mathcal{I}$ で定義されるとする
- H を G の誘導部分グラフとする
- H の頂点に対応する $\mathcal{I}$ の区間を全部集めて $\mathcal{I}'$ とすると，$H = G(\mathcal{I}')$ (H は $\mathcal{I}'$ が定義する区間グラフ) □

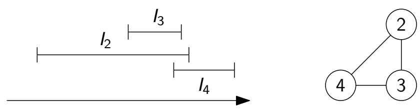


区間グラフの染色数とクリーク数

性質：区間グラフの染色数とクリーク数

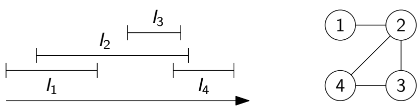
G が区間グラフ $\Rightarrow$ $\chi(G) = \omega(G)$

証明：頂点数に関する帰納法 (頂点数 1 の区間グラフに対しては成立)
- $G = G(\mathcal{I})$ となる閉区間の集合 $\mathcal{I}$ を考える
- 右端がもっとも左にある区間に着目し，I とする．
- $\mathcal{I}' = \mathcal{I} - \{I\}$ として，$G' = G(\mathcal{I}')$ を考える
- G' は区間グラフなので，帰納法の仮定より，$\chi(G') = \omega(G')$
- つまり，G' は $\omega(G')$ 彩色可能



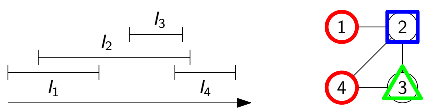
区間グラフの染色数とクリーク数 (続)

この $\omega(G')$ 彩色から，G の彩色を次のように得る
- G において，I に対応する頂点の隣接頂点全体 X を見てみると，それはクリーク
  - $\because$ I の右端を必ず含むから
- X に現れない色がある $\Rightarrow$ その現れない色で I に対応する頂点を塗る
  - このとき，$\chi(G) \leq \chi(G') = \omega(G') \leq \omega(G)$ となり，$\chi(G) = \omega(G)$ が得られる
- X にすべての色が現れる $\Rightarrow$ 新しい色で I に対応する頂点を塗る
  - このとき，$\chi(G) \leq |X| + 1 = \omega(G)$ となり，$\chi(G) = \omega(G)$ が得られる □



区間グラフ：アルゴリズム

帰納法の証明はそのままアルゴリズムとなる



$\rightsquigarrow$ 貪欲彩色 (greedy coloring) $O(n \log n)$ 時間

$n =$ 閉区間数 (頂点数)

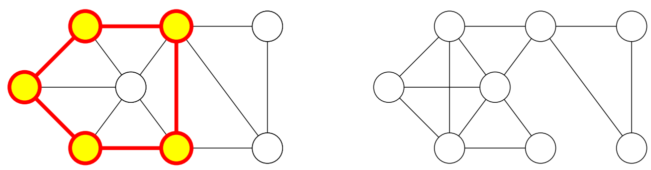
目次

弦グラフとは？

$G = (V, E)$ グラフ

定義：弦グラフとは？

G が弦グラフ (chordal graph) であるとは，すべての誘導閉路の長さが 3 であること



弦グラフではない　　　弦グラフである

補足

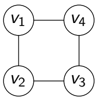
三角化グラフ (triangulated graph) などとも呼ばれることがある

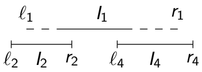
区間グラフは弦グラフ

性質：区間グラフは弦グラフ

区間グラフの誘導閉路の長さはどれも 3

つまり，長さが 4 以上の誘導閉路がある ⇒ 矛盾





長さ 4 のときの証明：v_i が区間 I_i に対応するとする

- 区間 I_i の左端を ℓ_i，右端を r_i とする
- 対称性を考慮すると，一般性を失わずに，
  I_1, I_2, I_4 が $\ell_1 \leq r_2 < \ell_4 \leq r_1$ を満たすように置かれると仮定してよい
- 区間 I_3 は I_2, I_4 と交わるので，$\ell_3 \leq r_2$ と $\ell_4 \leq r_3$ を満たす．
- すなわち，ある点 $x \in I_3$ が存在して，$r_2 < x < \ell_4$ となる．
- よって，$\ell_1 < x < r_1$ となり，$x \in I_1$ であるので，I_1 と I_3 は交わる
- 一方，v_1 と v_3 は隣接しないので，これは矛盾 □

弦グラフの遺伝性

性質：弦グラフの遺伝性

G が弦グラフである ⇒ G の誘導部分グラフ H も弦グラフ

証明：演習問題
(対偶を考えた方が分かりやすいかもしれない)

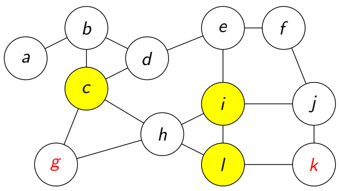
分離集合

グラフ $G = (V, E)$，異なる 2 頂点 $s, t \in V$ (ただし，$\{s, t\} \notin E$)

分離集合とは？

頂点集合 $S \subseteq V - \{s, t\}$ が G の s, t 分離集合であるとは，
$G - S$ において，s から t への道が存在しないこと

黄色の頂点から成る集合は g, k 分離集合



分離集合は頂点カットとも呼ばれる

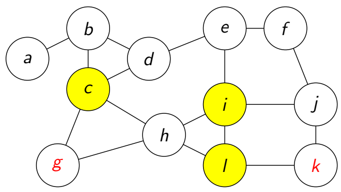
極小分離集合

グラフ $G = (V, E)$，異なる 2 頂点 $s, t \in V$ (ただし，$\{s, t\} \notin E$)

分離集合とは？

s, t 分離集合 $S \subseteq V - \{s, t\}$ が極小 s, t 分離集合であるとは，
その真部分集合がどれも s, t 分離集合ではないこと

黄色の頂点から成る集合は極小 g, k 分離集合

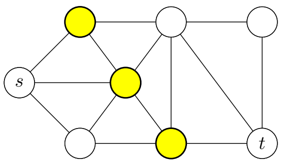


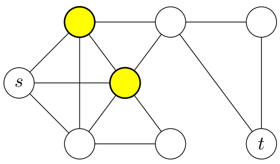
弦グラフにおける極小分離集合とクリーク

弦グラフ $G = (V, E)$，異なる 2 頂点 $s, t \in V$ (ただし，$\{s, t\} \notin E$)

弦グラフの性質：極小分離集合はクリーク

$S \subseteq V - \{s, t\}$ が G の極小 s, t 分離集合 ⇒ S は G のクリーク





弦グラフにおける極小分離集合とクリーク：証明

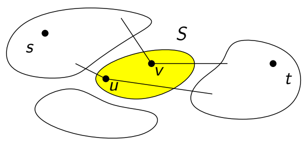
弦グラフ $G = (V, E)$，異なる 2 頂点 $s, t \in V$ (ただし，$\{s, t\} \notin E$)

弦グラフの性質：極小分離集合はクリーク

$S \subseteq V - \{s, t\}$ が G の極小 s, t 分離集合 ⇒ S は G のクリーク

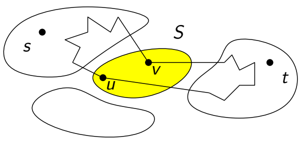
証明：S を極小 s, t 分離集合とする

- $G - S$ の連結成分で s, t を含むものをそれぞれ G_1, G_2 とする
- 各 $v \in S$ は G_1, G_2 のそれぞれに隣接頂点を持つ
  (そうでないと，$S - \{v\}$ が s, t 分離集合となってしまうから)
- 異なる 2 点 $u, v \in S$ を考え，$\{u, v\} \notin E$ だと仮定



弦グラフにおける極小分離集合とクリーク：証明 (続)

- $G_1 + \{u, v\}$ と $G_2 + \{u, v\}$ は連結なので，
  それぞれには u から v へ至る道が存在 (特に，最短路が存在)
- この 2 つの最短路をつなぐと，G において，長さ 4 以上の誘導閉路が見つかる
- これは G が弦グラフであることに矛盾 (つまり，$\{u, v\} \in E$)
- つまり，S はクリーク □

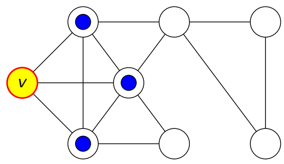


単体的頂点

グラフ $G = (V, E)$，$v \in V$

定義：単体的頂点とは？

v が G の単体的頂点 (simplicial vertex) であるとは，
G において v の隣接頂点全体がクリークであること



G が完全グラフ ⇒ すべての頂点が単体的頂点

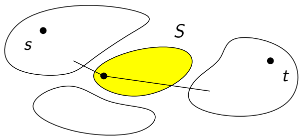
弦グラフの単体的頂点

完全グラフではない弦グラフ $G = (V, E)$

弦グラフの性質：単体的頂点

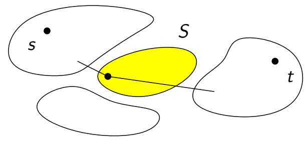
G には，隣接しない単体的頂点が 2 つ以上存在する

証明：頂点数に関する帰納法
- s, t を G において隣接しない 2 頂点とする
- S を極小 s, t 分離集合とする (先ほどの性質より S はクリーク)
- $G - S$ の連結成分で s, t を含むものをそれぞれ G_1, G_2 とする
- $G_1 + S$ は弦グラフ (G の誘導部分グラフなので)
- $G_1 + S$ が完全グラフであるとき，s は G の単体的頂点



弦グラフの単体的頂点 (続)

$G_1 + S$ が完全グラフではないとする
- 帰納法の仮定から，$G_1 + S$ には隣接しない単体的頂点が 2 つは存在
- その中の少なくとも 1 つは S の要素ではない (S はクリークだから)
- その要素は G の単体的頂点
- G_2 に対しても，同じ考察を行う □



目次

弦グラフは理想グラフ

今から証明すること

弦グラフは理想グラフである

証明の流れ

済 弦グラフの誘導部分グラフも弦グラフ
(弦グラフの遺伝性)

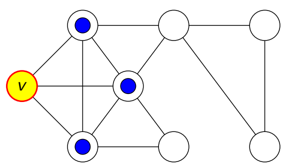
■ 弦グラフにおいて，染色数 $=$ クリーク数

弦グラフの染色数とクリーク数

性質：弦グラフの染色数とクリーク数

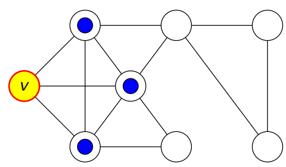
G が弦グラフ $\Rightarrow \chi(G) = \omega(G)$

証明：頂点数に関する帰納法 (頂点数 1 の弦グラフに対しては成立)
- v を G の単体的頂点として，$G' = G - v$ を考える
- G' は弦グラフなので，帰納法の仮定より，$\chi(G') = \omega(G')$
- つまり，G' は $\omega(G')$ 彩色可能



弦グラフの染色数とクリーク数 (続)

この $\omega(G')$ 彩色から，G の彩色を次のように得る
- G において，v の隣接頂点全体 X を見てみると，
  それはクリーク ($\because$ v は単体的頂点だから)
- X に現れない色がある $\Rightarrow$ その現れない色で v を塗る
  - このとき，$\chi(G) \leq \chi(G') = \omega(G') \leq \omega(G)$ となり，
    $\chi(G) = \omega(G)$ が得られる
- X にすべての色が現れる $\Rightarrow$ 新しい色で v を塗る
  - このとき，$\chi(G) \leq |X| + 1 = \omega(G)$ となり，
    $\chi(G) = \omega(G)$ が得られる □



今日の内容

前回までの内容

代表的な理想グラフの紹介
- 二部グラフ (簡単)
- 二部グラフの線グラフ (Kőnig の定理)
- 二部グラフの補グラフ (Kőnig–Egerváry の定理)
- 二部グラフの線グラフの補グラフ (Kőnig–Egerváry の定理)

今日の内容

代表的な理想グラフの紹介
- 区間グラフ (interval graph)
- 弦グラフ (chordal graph)

次回予告

弱理想グラフ定理の証明

目次