離散最適化基礎論 (13) 2019 年 2 月 8 日
演習問題 岡本 吉央

提出締切： —

注意：演習問題の解答において，断りがない限り，強理想グラフ定理を用いてはならない．

復習問題 13.1 無向グラフ $G = (V, E)$ に対して，そのクリーク数を $\omega(G)$ で表す．

任意の無向グラフ $G = (V, E)$ と任意の頂点 $v \in V$ に対して，次が成り立つことを証明せよ．

1. $\omega(G) = \omega(G - v)$ ならば，G には v を含まない最大クリークが存在する．
2. $\omega(G) > \omega(G - v)$ ならば，G の最大クリークはどれも v を含む．

復習問題 13.2 理想グラフのクリーク数が多項式時間で計算できる，という事実を用いて，理想グラフの最大クリークを多項式時間で 1 つ発見するアルゴリズムを設計せよ．(ヒント：演習問題 13.1 を用いるとよい．)

復習問題 13.3 理想グラフ $G = (V, E)$ には，すべての最大クリークと交わるような独立集合が存在することが知られている．そのような独立集合を見つけるため，次のような手続きを考える．

ステップ 1：G の最大クリークを 1 つ見つけ，C_1 とする．C_1 と交わる独立集合を 1 つ見つけ，S_1 とする．$\omega(G) > \omega(G - S_1)$ ならば，S_1 を出力し，終了する．$\omega(G) = \omega(G - S_1)$ ならば，ステップ 2 へ進む．

ステップ 2：$G - S_1$ の最大クリークを 1 つ見つけ，C_2 とする．C_1, C_2 と交わる独立集合を 1 つ見つけ，S_2 とする．$\omega(G) > \omega(G - S_2)$ ならば，S_2 を出力し，終了する．$\omega(G) = \omega(G - S_2)$ ならば，ステップ 3 へ進む．

ステップ 3：$\cdots$

ステップ t：$G - S_{t-1}$ の最大クリークを 1 つ見つけ，C_t とする．$C_1, C_2, \ldots, C_t$ と交わる独立集合を 1 つ見つけ，S_t とする．$\omega(G) > \omega(G - S_t)$ ならば，S_t を出力し，終了する．$\omega(G) = \omega(G - S_t)$ ならば，ステップ 3 へ進む．

これは有限の手続きであるため，必ず終了する．以下の問いに答えよ．

1. この手続きの出力が，G のすべてのクリークと交わる独立集合であることを証明せよ．
2. 理想グラフの最大重み独立集合が多項式時間で見つけられるという事実を用いて，各ステップ t において，独立集合 S_t を多項式時間で求められることを証明せよ．

復習問題 13.4 理想グラフの染色数が多項式時間で計算できる，という事実と，理想グラフの重み付きクリーク数が多項式時間で計算できる，という事実を用いて，理想グラフの最小彩色を多項式時間で 1 つ発見するアルゴリズムを設計せよ．(ヒント：他の演習問題の内容を用いてもよい．)

補足問題 13.5 理想グラフの重み付きクリーク数が多項式時間で計算できる，という事実を用いて，理想グラフの最大重みクリークを多項式時間で 1 つ発見するアルゴリズムを設計せよ．

補足問題 13.6 演習問題 13.3 にある手続きを考える．停止までに見つかる最大クリーク $C_1, C_2, \ldots, C_t$ の数が G の頂点数以下であることを証明せよ．