離散最適化基礎論 (12) 2019 年 2 月 1 日
演習問題 岡本 吉央

提出締切： 2019 年 2 月 8 日 講義終了時

注意：演習問題の解答において，断りがない限り，強理想グラフ定理を用いてはならない．

復習問題 12.1 任意の無向グラフ G と H に対して，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\chi(\overline{G \boxtimes H}) \leq \chi(\overline{G}) \cdot \chi(\overline{H}).$$

ただし，$G \boxtimes H$ は G と H の積，$\overline{G}$ は G の補グラフ，$\chi(G)$ は G の染色数を表す．

復習問題 12.2 任意の無向グラフ G に対して，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\alpha(G) \leq \Theta(G) \leq \chi(\overline{G}).$$

ただし，$\Theta(G)$ は G のシャノン容量を表す．(ヒント：演習問題 12.1 を用いてもよい．)

復習問題 12.3 任意の理想グラフ G に対して，次の等式が成り立つことを証明せよ．

$$\alpha(G) = \Theta(G) = \chi(\overline{G}).$$

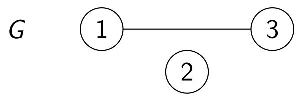
ただし，$\Theta(G)$ は G のシャノン容量を表す．(ヒント：演習問題 12.2 を用いてもよい．)

復習問題 12.4 無向グラフ $G = (V, E)$ に対して，次の最適化問題の最適値を $\vartheta_2(G)$ で表す．

$$\begin{array}{lll} \text{(EIG)} & \text{minimize} & \Lambda(A+J) \\ & \text{subject to} & A_{vv} = 0 \quad (v \in V) \\ & & A_{uv} = 0 \quad (\{u,v\} \notin E) \\ & & A \in \mathcal{S}^n. \end{array}$$

ただし，$n = |V|$ であり，$\mathcal{S}^n$ は n 次実対称行列全体の集合である．また，$J \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は全ての成分が 1 である行列であり，$\Lambda(A+J)$ は $A+J$ の最大固有値を表す．

次のグラフ G に対して，$\vartheta_2(G)$ の値を求めよ．



復習問題 12.5 2 つの n 次実対称半正定値行列 $X, Y \in \mathcal{S}^n_+$ に対して，$X \bullet Y \geq 0$ が成り立つことを証明せよ．ただし，$X \bullet Y = \mathrm{tr}(X^\top Y)$ である．

復習問題 12.6 演習問題 12.4 にある $\vartheta_2(G)$ を考える．また，次の最適化問題の最適値として，$\vartheta(G)$ を定義する．

$$\begin{array}{lll} \text{(LOV)} & \text{maximize} & \displaystyle\sum_{u \in V} \sum_{v \in V} X_{uv} \\ & \text{subject to} & X_{uv} = 0 \quad (\{u,v\} \in E) \\ & & \displaystyle\sum_{v \in V} X_{vv} = 1 \\ & & X \in \mathcal{S}^n_+ \end{array}$$

ただし，$\mathcal{S}^n_+$ は n 次実対称半正定値行列全体の集合である．

任意の無向グラフ G に対して，$\vartheta(G) \leq \vartheta_2(G)$ が成り立つことを証明せよ．(ヒント：演習問題 12.5，12.9 を用いてもよい．)

復習問題 12.7 実対称半正定値行列 A, B に対して，そのクロネッカー積 $A \otimes B$ も半正定値であることを証明せよ．(演習問題 10 を用いてもよい．)

復習問題 12.8 以下の問いに答えよ．

1. 次の行列の最大固有値を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & z & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & z & z \\ z & 1 & 1 & 1 & z \\ z & z & 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & z & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ただし，$z = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$ とする．

2. 上の事実から，シャノン容量 $\Theta(C_5)$ の上界を導け．(他の演習問題の結果を用いてもよい．)

補足問題 12.9 n 次実対称行列 $X \in \mathcal{S}^n$ の最大固有値を λ とする．

1. $\lambda I - X$ も実対称半正定値行列であることを証明せよ．

2. $\mu I - X$ が半正定値であるとき，$\mu \geq \lambda$ が成り立つことを証明せよ．

補足問題 12.10 実行列 A, B, C, D を考える．次の関係式を導け．ただし，和や積はうまく定義されるものとする．

1. $(A+B) \otimes (C+D) = (A \otimes C) + (B \otimes C) + (A \otimes D) + (B \otimes D)$.

2. $A \otimes B = (A \otimes I_{m'})(I_n \otimes B) = (I_m \otimes B)(A \otimes I_{n'})$.

3. $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$.

追加問題 12.11 任意の無向グラフ G に対して，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\Theta(G) \leq \chi_f(\overline{G}).$$

ただし，$\chi_f(G)$ は G の分数染色数である．

追加問題 12.12 任意の無向グラフ G, H に対して，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\vartheta(G) \cdot \vartheta(H) \leq \vartheta(G \boxtimes H).$$