

提出締切：2019年2月1日 講義終了時

復習問題 11.1 $G = (V, E)$ を無向グラフとして、 $n = |V|$ とする。次の最適化問題の最適値を $\vartheta(G)$ と表記する

$$\begin{aligned} \text{(LOV)} \quad & \text{maximize} && \sum_{u \in V} \sum_{v \in V} X_{uv} \\ & \text{subject to} && X_{uv} = 0 \quad (\{u, v\} \in E) \\ & && \sum_{v \in V} X_{vv} = 1 \\ & && X \in \mathcal{S}_+^n. \end{aligned}$$

ただし、「 $X \in \mathcal{S}_+^n$ 」は X が n 次実対称半正定値行列であることを表す。以下の問いに答えよ。

1. G のクリーク数を $\omega(G)$ とするとき、 $\omega(G) \leq \vartheta(\overline{G})$ が成り立つことを証明せよ。
2. G の染色数を $\chi(G)$ とするとき、 $\vartheta(\overline{G}) \leq \chi(G)$ が成り立つことを証明せよ。(ヒント：彩色を頂点集合 V の独立集合への分割として捉えよ。)

復習問題 11.2 実対称優対角行列が半正定値であることを証明せよ。(ヒント：最小固有値が非負であることを証明すればよい。)

追加問題 11.3 $G = (V, E)$ を無向グラフとして、 $n = |V|$ とする。次の最適化問題の最適値を $\vartheta'(G)$ と表記する

$$\begin{aligned} \text{(LOV')} \quad & \text{maximize} && \sum_{u \in V} \sum_{v \in V} X_{uv} \\ & \text{subject to} && X_{uv} = 0 \quad (\{u, v\} \in E) \\ & && X_{uv} \geq 0 \quad (\{u, v\} \notin E) \\ & && \sum_{v \in V} X_{vv} = 1 \\ & && X \in \mathcal{S}_+^n. \end{aligned}$$

ただし、「 $X \in \mathcal{S}_+^n$ 」は X が n 次実対称半正定値行列であることを表す。以下の問いに答えよ。

1. G のクリーク数を $\omega(G)$ とするとき、 $\omega(G) \leq \vartheta'(\overline{G})$ が成り立つことを証明せよ。
2. G の染色数を $\chi(G)$ とするとき、 $\vartheta'(\overline{G}) \leq \chi(G)$ が成り立つことを証明せよ。(ヒント：演習問題 11.1 の結果を用いてもよい。)

追加問題 11.4 演習問題 11.1 の状況を考える。 G の分数染色数 $\chi_f(G)$ に対して、 $\vartheta(\overline{G}) \leq \chi_f(G)$ が成り立つことを証明せよ。