

提出締切：2019年1月25日 講義終了時

復習問題 10.1 自然数 $n \geq 1$ に対して、次の集合に挙げる集合 X が凸集合であることを証明せよ。

1. $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|^2 \leq 1\}$.
2. $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^\top x \leq b\}$. ただし、 $a \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$.

復習問題 10.2 実対称行列 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ は正定値である。なぜか？

復習問題 10.3 実対称行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は半正定値であるが、正定値ではない。なぜか？

復習問題 10.4 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して、 n 次正方実対称半正定値行列全体の集合 S_+^n が凸集合であることを証明せよ。

復習問題 10.5 実対称行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ を考える。

1. この行列は半正定値ではない。なぜか？
2. この行列と 2 次正方実対称半正定値行列全体の集合 S_+^2 を分離する超平面を 1 つ求めよ。そして、なぜそれが分離超平面となるのか、説明せよ。

追加問題 10.9 自然数 $n \geq 1$ に対して、集合 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ から作られる次の集合

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y^\top x \leq 1 \forall x \in X\}$$

を考える。

1. Y が凸集合であることを証明せよ。
2. $n = 2$ で、 X が 4 点 $(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$ を頂点とする正方形であるとき、上で定義された Y は何になるか？ 図示せよ。

追加問題 10.10 次に挙げる実対称行列がそれぞれ半正定値であるかどうか、判定せよ。半正定値でない場合は、その行列と 3 次実対称半正定値行列全体の集合 S_+^3 を分離する超平面を 1 つ見つけよ。

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

補足問題 10.6 自然数 $n \geq 1$ に対して、集合 $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ を考える。 X と Y が凸集合であるとき、 $X \cap Y$ も凸集合であることを証明せよ。

補足問題 10.7 自然数 $n \geq 1$ に対して、実対称行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ とベクトル $x \in \mathbb{R}^n$ を考える。このとき、次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$x^\top Ax = (xx^\top) \bullet A.$$

(ヒント: 2 つの行列 A, B に対して、 AB と BA が定義される時、 $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ が成り立つことを用いても良い。)

追加問題 10.8 自然数 $n \geq 1$ に対して、集合 $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ を考える。このとき、 X と Y の和を

$$X + Y = \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$$

で定義する。 X と Y が凸集合であるとき、 $X + Y$ も凸集合であることを証明せよ。