提出締切： 2018 年 11 月 30 日 講義終了時

注意：演習問題の解答において，断りがない限り，弱理想グラフ定理と強理想グラフ定理を用いてはならない．

復習問題 6.1 与えられたグラフ G の最大独立集合を求める問題を，充填型整数計画問題として定式化せよ．その際，変数として，G の各頂点 v に対して，v を選択するか否かを表す 01 変数 x_v を用いよ．

復習問題 6.2 グラフの彩色を独立集合への分割であると見なすことで，与えられたグラフ G の染色数を計算する問題を，被覆型整数計画問題として定式化せよ．その際，変数として，G の各独立集合 S に対して，S を分割に用いるか否かを表す 01 変数 y_S を用いよ．

復習問題 6.3 自然数 $m, n \geq 1$，01 行列 $A \in \{0,1\}^{m \times n}$ に対して，次の整数計画問題 (P) を考える．

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \mathbf{1}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} \leq \mathbf{1}, \\ & \boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n. \end{aligned}$$

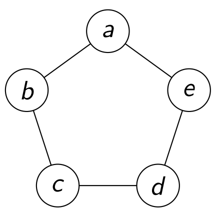
ただし，変数は $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ である．この整数計画問題 (P) の線形計画緩和 (LP) は次のように書ける．

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \mathbf{1}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} \leq \mathbf{1}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

(P) にも (LP) にも最適解が存在すると仮定する．以下の問いに答えよ．

1. (P) の任意の許容解は (LP) の許容解でもあることを証明せよ．
2. (P) の最適値は (LP) の最適値以下であることを証明せよ．
3. (LP) の最適解 $\boldsymbol{x}$ が (P) の許容解であるとき，$\boldsymbol{x}$ は (P) の最適解であることを証明せよ．

復習問題 6.4 次のグラフの分数染色数が 5/2 であることを証明せよ．



補足問題 6.5 演習問題 6.3 の設定において，次の整数計画問題 (C) を考える．

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \mathbf{1}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{subject to} \quad & A^\top \boldsymbol{y} \geq \mathbf{1}, \\ & \boldsymbol{y} \in \{0,1\}^m. \end{aligned}$$

ただし，変数は $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ である．この整数計画問題 (C) の線形計画緩和 (LC) は次のように書ける．

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \mathbf{1}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{subject to} \quad & A^\top \boldsymbol{y} \geq \mathbf{1}, \\ & \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

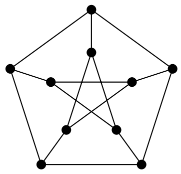
(C) にも (LC) にも最適解が存在すると仮定する．以下の問いに答えよ．

1. (C) の任意の許容解は (LC) の許容解でもあることを証明せよ．
2. (C) の最適値は (LC) の最適値以上であることを証明せよ．
3. (LC) の最適解 $\boldsymbol{y}$ が (C) の許容解であるとき，$\boldsymbol{y}$ は (C) の最適解であることを証明せよ．
4. $\boldsymbol{x}$ が (LP) の許容解であり，$\boldsymbol{y}$ が (LC) の許容解であるとき，$\mathbf{1}^\top \boldsymbol{x} \leq \mathbf{1}^\top \boldsymbol{y}$ が成り立つことを証明せよ．

追加問題 6.6

1. 与えられたグラフ G の最大マッチングを求める問題を，充填型整数計画問題 (P) として定式化せよ．その際，変数として，G の各辺 e に対して，e を選択するか否かを表す 01 変数 x_e を用いよ．
2. 問題 (P) に対応する被覆型整数計画問題 (C) を記述せよ．その変数は G における何を表すのか，明確にせよ．また，(C) の最適値として得られる値の表すものが何であるのか，説明せよ．
3. (P) の最適値が (C) の最適値以下であるという一般論から，グラフ G について何が分かるか説明せよ．

追加問題 6.7 次のグラフの分数染色数を定めよ．



追加問題 6.8 任意の自然数 $k \geq 1$ に対して，頂点数 $2k+1$ の閉路 C_{2k+1} の分数染色数が $2 + \frac{1}{k}$ 以下であることを証明せよ．