

提出締切：2018年11月16日 講義終了時

注意：演習問題の解答において、断りがない限り、弱理想グラフ定理と強理想グラフ定理を用いてはならない。

追加問題 5.4 弱理想グラフ定理から、理想グラフの複製補題を導いてみよ。

復習問題 5.1 グラフ  $G = (V, E)$  とその頂点  $v \in V$  を考える。グラフ  $G$  において  $v$  を複製して得られるグラフ  $G' = (V', E')$  とは、新しく頂点  $v'$  を  $G$  に追加し、 $V' = V \cup \{v'\}$ 、かつ、 $E' = E \cup \{\{u, v'\} \mid \{u, v\} \in E\} \cup \{\{v, v'\}\}$  として定義されるグラフのことである。

グラフ  $G$  が理想グラフであるとき、その任意の頂点を複製して得られるグラフも理想グラフであることを証明せよ。

復習問題 5.2 以下の流れに従って、弱理想グラフ定理を証明せよ。なお、弱理想グラフ定理とは、 $G$  が理想グラフであるとき、 $\overline{G}$  も理想グラフであるという定理である。

1.  $G$  の頂点数に関する数学的帰納法で証明する。 $G$  の頂点数が1のときに正しいことを確認せよ。
2. 以後、理想グラフ  $G$  の頂点数は2以上であるとする。 $G$  の最大独立集合全体の集合を  $\mathcal{A}$  とする。また、各頂点  $v \in V$  に対して、 $k(v)$  で  $v$  を含む最大独立集合の総数をあらわすとする。すなわち、 $k(v) = |\{S \in \mathcal{A} \mid v \in S\}|$  である。各頂点  $v$  を  $k(v)$  回複製して得られたグラフを  $G' = (V', E')$  とする。なお、 $k(v) = 0$  のとき、 $v$  は除去するものとする。このとき、 $G'$  が理想グラフであることを確認せよ。(ヒント：演習問題 5.1 を用いてもよい。)
3.  $\chi(G') \leq |\mathcal{A}|$  が成り立つ。なぜか？
4.  $\chi(G') \geq |\mathcal{A}|$  が成り立つ。なぜか？(ヒント：演習問題 5.3 を用いてもよい。)
5. 以上から、 $G'$  の任意の最大クリークは  $\mathcal{A}$  のすべての要素と交わる。なぜか？
6.  $G'$  の最大クリークを1つ選び、それに対応する  $G$  のクリークを  $X$  とする。 $X$  は  $G$  のすべての最大独立集合と交わる。 $G - X$  は理想グラフである。なぜか？
7.  $\alpha(G - X) = \alpha(G) - 1$  となる。なぜか？
8. 帰納法の仮定を用いて、 $\chi(\overline{G}) \leq \omega(\overline{G})$  を導出せよ。

補足問題 5.3 任意のグラフ  $G = (V, E)$  に対して、

$$\chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)}$$

が成り立つことを証明せよ。