離散最適化基礎論 (4)　　　　2018 年 10 月 26 日
演習問題　　　　岡本 吉央

提出締切： 2018 年 11 月 9 日 講義終了時

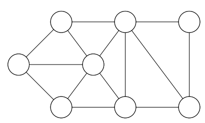
注意：演習問題の解答において，断りがない限り，弱理想グラフ定理と強理想グラフ定理を用いてはならない．

復習問題 4.1 区間グラフの誘導部分グラフも区間グラフであることを証明せよ．

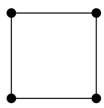
復習問題 4.2 区間グラフ G に対して，$\chi(G) = \omega(G)$ が成り立つことを，以下の手順に従って証明せよ．

1. G の頂点数に関する数学的帰納法で証明する．G の頂点数が 1 のときに成立することを証明せよ．
2. G の頂点数が 2 以上であると仮定し，G が閉区間の集合 $\mathcal{I}$ によって定義されるとする．このとき，$\mathcal{I}$ の中で右端が最も左にある区間 (の 1 つ) を I として，$\mathcal{I}' = \mathcal{I} - \{I\}$ とする．$\mathcal{I}'$ の定義する区間グラフを G' とすると，G' は区間グラフなので，$\chi(G') = \omega(G')$ が成り立つ．つまり，G' は $\omega(G')$ 彩色を持つ．この G' の $\omega(G')$ 彩色から G の $\omega(G)$ 彩色を構成せよ．
3. 以上より，$\chi(G) = \omega(G)$ が成り立つことを導け．

復習問題 4.3 次のグラフは弦グラフではない．なぜ弦グラフではないのか，説明せよ．



復習問題 4.4 次のグラフは区間グラフではない．なぜ区間グラフではないのか，説明せよ．



復習問題 4.5 弦グラフ $G = (V, E)$ において，隣接しない 2 頂点 s, t を考える．このとき，$S \subseteq V - \{s, t\}$ が G の極小 s, t 分離集合であるならば，S は G のクリークであることを証明せよ．

復習問題 4.6 完全グラフではない弦グラフ $G = (V, E)$ を考える．このとき，G には隣接しない単体的頂点 (すなわち，その隣接頂点全体がクリークを成すような頂点) が 2 つ以上存在することを証明せよ．

復習問題 4.7 弦グラフ G に対して，$\chi(G) = \omega(G)$ が成り立つことを証明せよ．(ヒント：演習問題 4.6 を用いてもよい．)

補足問題 4.8 弦グラフの誘導部分グラフも弦グラフであることを証明せよ．

補足問題 4.9 長さ 5 以上の閉路が区間グラフではないことを証明せよ．

追加問題 4.10 次は正しいか？ 理由も付けて答えよ．

閉路を含まないグラフはどれも弦グラフである．

追加問題 4.11 次は正しいか？ 理由も付けて答えよ．

弦グラフの部分グラフは弦グラフである．

追加問題 4.12 スプリット・グラフ (split graph) とは，グラフ $G = (V, E)$ で，頂点集合 V をクリーク A と独立集合 B に分割できる (つまり，$V = A \cup B$ かつ $A \cap B = \emptyset$ となるクリーク A と独立集合 B が存在する) もののことである．スプリット・グラフが弦グラフであることを証明せよ．

追加問題 4.13 弦グラフ G に対して，$\chi(\overline{G}) = \omega(\overline{G})$ が成り立つことを証明せよ．(ヒント：演習問題 4.6 を用いてもよい．)