離散最適化基礎論 (3) 2018 年 10 月 19 日
演習問題 岡本 吉央

提出締切： 2018 年 10 月 26 日 講義終了時

注意：演習問題の解答において，断りがない限り，弱理想グラフ定理と強理想グラフ定理を用いてはならない．

復習問題 3.1 任意のグラフ $G=(V,E)$ の任意の頂点部分集合 $X \subseteq V$ に対して，X が G の独立集合であるとき，そのときに限り，X は補グラフ $\overline{G}$ のクリークであることを証明せよ．そのことから，独立数 $\alpha(G)$ が補グラフのクリーク数 $\omega(\overline{G})$ に等しいことを導いてみよ．

復習問題 3.2 任意のグラフ $G=(V,E)$ の任意の頂点部分集合 $X \subseteq V$ に対して，X が G の独立集合であるとき，そのときに限り，補集合 $V-X$ は G の頂点被覆であることを証明せよ．そのことから，独立数 $\alpha(G)$ と頂点被覆数 $\tau(G)$ の間に $\alpha(G)=|V|-\tau(G)$ という関係式が成り立つことを導いてみよ．

復習問題 3.3 任意の二部グラフ $G=(V,E)$ を考える．

1. 辺部分集合 $M \subseteq E$ が G のマッチングであるとき，補グラフ $\overline{G}$ は $|V|-|M|$ 彩色可能であることを証明せよ．
2. m を 1 以上の整数とする．補グラフ $\overline{G}$ が $|V|-m$ 彩色可能であるとき，G は要素数 m のマッチングを持つことを証明せよ．
3. 上の 2 つの小問から，補グラフ $\overline{G}$ の染色数 $\chi(\overline{G})$ が $|V|-\nu(G)$ に等しいことを導いてみよ．ただし，$\nu(G)$ は G のマッチング数を表す．

復習問題 3.4 任意の二部グラフ $G=(A,B;E)$ を考える．マッチング数 $\nu(G)$ と頂点被覆数 $\tau(G)$ の間に $\nu(G) \geq \tau(G)$ という関係が成り立つことを以下の手順に沿って証明せよ．

1. $\tau=\tau(G)$ とする．G から辺を除去し続けて，次の 2 条件を満たすグラフ G' を作る
   - $\tau(G')=\tau$.
   - G' の任意の辺 e に対して，$\tau(G'-e)<\tau$.

   このときに，G' の最大次数が 1 であることを示したい．背理法のために，G' の最大次数が 2 以上であると仮定する．つまり，G' の 2 辺 e,f の中で同じ頂点 x を端点とするものが存在する．このとき，$\tau(G'-e)=\tau(G'-f)=\tau-1$ となることを証明せよ．
2. S_e を $G'-e$ の最小頂点被覆，S_f を $G'-f$ の最小頂点被覆とする．小問 1 より，$|S_e|=|S_f|=\tau-1$ が成り立つ．このとき，e の端点は S_e に含まれず，f の端点は S_f に含まれないことを証明せよ．
3. 誘導部分グラフ $G''=G'[(S_e \triangle S_f) \cup \{x\}]$ を考える．ここで，$\triangle$ は対称差を表す．また，$t=|S_e \cap S_f|$ とする．このとき，G'' の頂点数が $2(\tau-1-t)+1$ となることを証明せよ．
4. G'' には頂点数が $\tau-1-t$ 以下の頂点被覆が存在することを証明せよ．そのような頂点被覆を 1 つ固定して，T とする．
5. $T'=T \cup (S_e \cap S_f)$ とする．T' が G' の頂点被覆であることを証明せよ．
6. 以上の小問の結果を用いて，$\tau(G') \leq |T'| \leq \tau(G')-1$ という矛盾を導いてみよ．つまり，G' の最大次数は 1 であることが分かった．
7. $\nu(G') = \tau(G')$ であることを用いて，最終的に，$\nu(G) \geq \tau(G)$ を導いてみよ．

補足問題 3.5 任意のグラフ G に対して，$\nu(G) \leq \tau(G)$ が成り立つことを証明せよ．ただし，$\nu(G)$ は G のマッチング数，$\tau(G)$ は G の頂点被覆数である．(注：G が二部グラフであるという制限はない．)

補足問題 3.6 この問の目標は，二部グラフの線グラフの補グラフが理想グラフであることを証明することである．任意の二部グラフ G に対して，以下の問いに答えよ．

1. G の線グラフの補グラフの染色数 $\chi(\overline{L(G)})$ が G の頂点被覆数 $\tau(G)$ に等しいことを証明せよ．(ヒント：彩色を独立集合への分割として捉えてみよ．G が二部グラフであるという条件を明示的に用いること．)
2. G の線グラフの補グラフのクリーク数 $\omega(\overline{L(G)})$ が G のマッチング数 $\nu(G)$ に等しいことを証明せよ．(ヒント：この関係式は G が二部グラフでなくても成立する．)
3. Kőnig–Egerváry の定理 (G が二部グラフであるとき，$\nu(G)=\tau(G)$) を用いて，$\chi(\overline{L(G)})=\omega(\overline{L(G)})$ となることを導いてみよ．

追加問題 3.7 G が二部グラフではないとき，G の線グラフの補グラフは理想グラフになるとは限らない．そのようなグラフ G の例を挙げよ．なぜそうなるのか，説明せよ．

追加問題 3.8 二部グラフ G の補グラフの線グラフは理想グラフになるとは限らない．そのようなグラフ G の例を挙げよ．なぜそうなるのか，説明せよ．

追加問題 3.9 二部グラフではないグラフ G に対して，マッチング数 $\nu(G)$ と頂点被覆数 $\tau(G)$ が等しくなるとは限らない．そのようなグラフ G の例を挙げよ．なぜそうなるのか，説明せよ．

追加問題 3.10 任意のグラフ $G=(V,E)$ に対して，

$$\alpha(G) \geq \frac{|V|}{\Delta(G)+1}$$

が成り立つことを証明せよ．ただし，$\alpha(G)$ は G の独立数，$\Delta(G)$ は G の最大次数を表す．