離散最適化基礎論 (2) 2018 年 10 月 12 日
演習問題 岡本 吉央

提出締切： 2018 年 10 月 19 日 講義終了時

注意：演習問題の解答において，断りがない限り，弱理想グラフ定理と強理想グラフ定理を用いてはならない．

復習問題 2.1 二部グラフの誘導部分グラフも二部グラフであることを証明せよ．

復習問題 2.2 二部グラフ G が辺を持たないとする．このとき，$\chi(G) = \omega(G)$ が成り立つことを証明せよ．

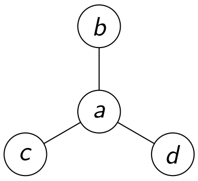
復習問題 2.3 二部グラフ G が辺を持つとする．このとき，$\chi(G) = \omega(G)$ が成り立つことを証明せよ．

復習問題 2.4 二部グラフ G に対して，$\omega(L(G)) = \Delta(G)$ が成り立つことを証明せよ．ただし，$\Delta(G)$ は G の最大次数を表す．

復習問題 2.5 グラフ G の辺染色数を $\chi'(G)$ で表す．二部グラフ G に対して，$\chi'(G) = \Delta(G)$ が成り立つことを以下の手順に従って証明せよ．

1. $\Delta(G) = 1$ のときに正しいことを示せ．
2. $\Delta(G) = 2$ のときに正しいことを示せ．
3. $\Delta(G) \geq 3$ であると仮定する．このとき，辺彩色であるという条件を満たしながら，G の辺を 1 つずつ $\Delta(G)$ 色のパレットを用いて塗っていく．これによって，すべての辺が塗れれば，塗り終わったときに $\Delta(G)$ 辺彩色が得られる．そのため，塗り切れなかった場合を考える．つまり，塗れなかった辺 $e = \{u, v\}$ が存在する．ここで，うまく塗り替えることにより，e にも色を与えられることを証明せよ．(ヒント：$\Delta(G) = 2$ の場合をうまく用いよ．)
4. 引き続き，$\Delta(G) \geq 3$ であると仮定する．上の手続きを繰り返すことで，$\chi'(G) = \Delta(G)$ が導かれることを証明せよ．

補足問題 2.6 次のグラフ H は線グラフではない．すなわち，$H = L(G)$ を満たすグラフ G が存在しない．なぜか，説明せよ．



補足問題 2.7 二部グラフの部分グラフも二部グラフであることを証明せよ．

補足問題 2.8 グラフ G の線グラフを $L(G)$ とする．グラフ G' が $L(G)$ の誘導部分グラフであるとき，G のある部分グラフ H が存在して，$G' = L(H)$ となることを証明せよ．(ヒント：G' を誘導する $L(G)$ の頂点部分集合が G の辺部分集合に対応することに着目せよ．)

追加問題 2.9 G が二部グラフではないとき，G の線グラフのクリーク数 $\omega(L(G))$ が G の最大次数 $\Delta(G)$ と等しくなるとは限らない．等しくないようなグラフの例を挙げよ．なぜそうなるのか，説明せよ．

追加問題 2.10 $n \geq 3$ を自然数として，長さが n の閉路を C_n で表すとする．閉路の線グラフ $L(C_n)$ が理想グラフとなるための，n に関する必要十分条件を挙げよ．なぜそうなるのか，説明せよ．(第 1 回も含めて，今までの演習問題の内容を用いてもよい．)

追加問題 2.11 $n \geq 1$ を自然数として，頂点数が n の完全グラフを K_n で表すとする．完全グラフの線グラフ $L(K_n)$ が理想グラフとなるための，n に関する必要十分条件を挙げよ．なぜそうなるのか，説明せよ．