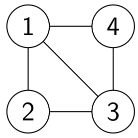
離散最適化基礎論 (1) 2018 年 10 月 5 日

演習問題 岡本 吉央

提出締切： 2018 年 10 月 12 日 講義終了時

注意：演習問題の解答において，断りがない限り，弱理想グラフ定理と強理想グラフ定理を用いてはならない．

復習問題 1.1 次のグラフが理想グラフであることを示せ．



補足問題 1.2 長さ 5 の閉路 C_5 に対して，その染色数とクリーク数を定めよ．その値となる理由も説明せよ．

補足問題 1.3 弱理想グラフ定理と強理想グラフ定理は次のように述べられる．

> **弱理想グラフ定理：**G が理想グラフであるための必要十分条件は，その補グラフ $\overline{G}$ が理想グラフであることである．
>
> **強理想グラフ定理：**G が理想グラフであるための必要十分条件は，G とその補グラフ $\overline{G}$ が長さ 5 以上の奇閉路を誘導部分グラフとして含まないことである．

強理想グラフ定理が正しいと仮定し，それを用いて，弱理想グラフ定理を導出せよ．

追加問題 1.4 任意の異なる 2 頂点が辺で結ばれたグラフを完全グラフと呼び，頂点数が n の完全グラフを K_n で表す．任意の自然数 $n \geq 1$ に対して，以下を証明せよ．

1. $\omega(K_n) = n$.
2. $\chi(K_n) = n$.
3. K_n は理想グラフである．

追加問題 1.5 長さが n の閉路を C_n で表す．任意の自然数 $k \geq 2$ に対して，以下を証明せよ．

1. $\omega(C_{2k+1}) = 2$.
2. $\chi(C_{2k+1}) = 3$.
3. C_{2k+1} は理想グラフではない．

ヒント：数学的帰納法を使おうとしない方がよい．

追加問題 1.6 長さが n の閉路を C_n で表すとき，その補グラフは $\overline{C_n}$ で表される．任意の自然数 $k \geq 2$ に対して，以下を証明せよ．

1. $\omega(\overline{C_{2k+1}}) = k$.
2. $\chi(\overline{C_{2k+1}}) = k + 1$.
3. $\overline{C_{2k+1}}$ は理想グラフではない．

ヒント：数学的帰納法を使おうとしない方がよい．

追加問題 1.7 $\chi(G) = \omega(G)$ を満たすが理想グラフではないグラフ G の例を構成せよ．なぜそうなるのか，その理由も説明せよ．