

グラフとネットワーク 第 6 回
最大流：数理

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2018 年 5 月 28 日

最終更新：2018 年 5 月 25 日 08:55

スケジュール 前半 (予定)

- | | | |
|---|--------------|--------|
| 1 | グラフの定義と次数：数理 | (4/9) |
| 2 | 道と閉路：数理 | (4/16) |
| 3 | 木：数理 | (4/23) |
| * | 休み | (4/30) |
| 4 | マッチング：数理 | (5/7) |
| * | 休講 | (5/14) |
| 5 | マッチング：モデル化 | (5/21) |
| 6 | 最大流：数理 | (5/28) |
| ● | 中間試験 | (6/4) |

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

- | | | |
|----|--------------|--------|
| 7 | 最大流：モデル化 (1) | (6/11) |
| 8 | 最大流：モデル化 (2) | (6/18) |
| 9 | 彩色：数理 | (6/25) |
| 10 | 彩色：モデル化 | (7/2) |
| | * 休講 | (7/9) |
| | * 休み | (7/16) |
| 11 | 平面グラフ：数理 | (7/23) |
| 12 | 平面グラフ：モデル化 | (7/30) |
| | ● 期末試験 | (8/6?) |

注意：予定の変更もありうる

- ▶ 日時，教室：6月4日(月) 10:40-12:10 @ 西2号館 101 教室
- ▶ 出題範囲
 - ▶ 第1回講義スライドの最初から第5回講義スライドの最後まで
- ▶ 出題形式
 - ▶ 演習問題と同じ形式の問題を4題出題する
 - ▶ その中の2題以上は演習問題として提示されたものと同一である(ただし、「発展」として提示された演習問題は出題されない)
 - ▶ 全問に解答する
- ▶ 配点：1題 15点満点，計 60点満点
- ▶ 時間：90分
- ▶ 持ち込み：A4用紙1枚分(裏表自筆書き込み)のみ可

主題

離散最適化の入門として、次を概説する

- ▶ グラフとネットワークを用いた数理モデル化
- ▶ アルゴリズム的解法の背後にある数理

キャッチフレーズ：「本当の離散数学がここから始まる」

達成目標

以下の4項目をすべて達成すること

- 1 グラフやネットワークに関する用語を正しく使うことができる
- 2 現実世界の諸問題をグラフやネットワークで表現し、数理モデルを構築できる
- 3 アルゴリズム的解法の背後にある数理、特に、最小最大定理の重要性を説明でき、それを用いて最適性の証明ができる
- 4 グラフとネットワークに関する簡単な数学的事実を証明できる

今日の目標

最大流問題に関して次ができるようになる

- ▶ 「流れ」が何であるのか記述でき，基本性質を証明できる
- ▶ **流れとカットの双対性**により流れの最大性を証明できる

重要な定理

- ▶ 最大流最小カット定理
- ▶ 整数流定理

目次

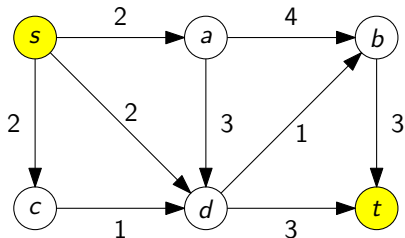
- ① 最大流問題とは？
- ② 流れとカットの弱双対性
- ③ 流れとカットの強双対性：最大流最小カット定理
- ④ 今日のまとめ

最大流問題とは？

定義：最大流問題とは？

入力

- ▶ 有向グラフ $G = (V, A)$, 各弧 $a \in A$ の容量 $c(a)$, 2 頂点 $s, t \in V$
(弧の容量は非負実数)



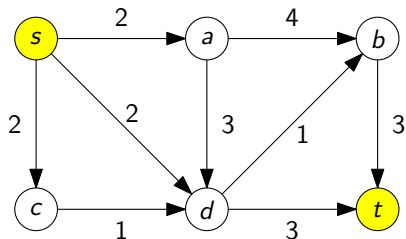
最大流問題とは？

定義：最大流問題とは？

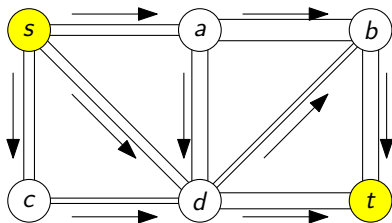
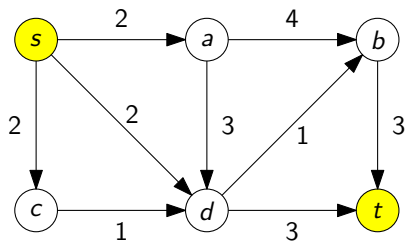
出力

- ▶ s から t へ至る流れで、その値が最大のもの

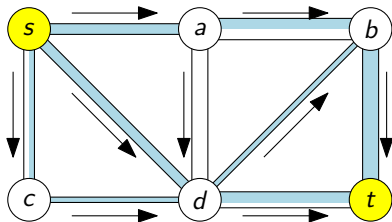
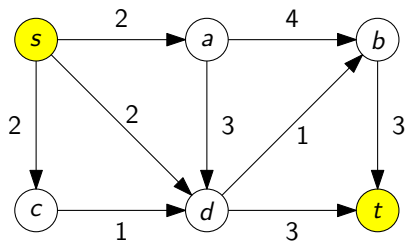
(s から t へ至る最大流)



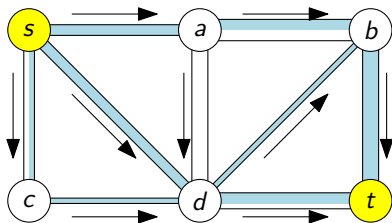
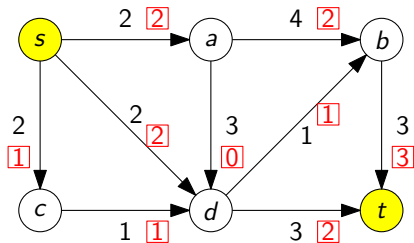
流れとは?: 直感 (1)



流れとは?: 直感 (2)



流れとは?: 直感 (3)



流れとは？ (1)

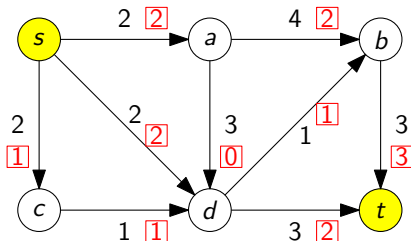
定義： s から t へ至る流れとは？

各弧 $a \in A$ に対する実数 $f(a)$ の割り当て (関数 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$) で次の2つを満たすもの

- 1 s, t 以外の頂点 $v \in V - \{s, t\}$ に対して, (流量保存制約)

$$\sum_{u:(u,v) \in A} f((u,v)) = \sum_{u:(v,u) \in A} f((v,u))$$

(v へ流入する総量) (v から流出する総量)



流れとは？ (2)

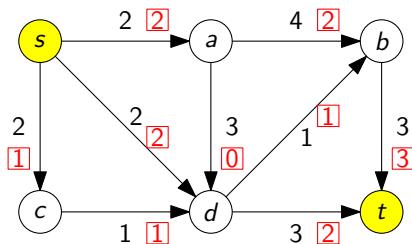
定義： s から t へ至る流れとは？

各弧 $a \in A$ に対する実数 $f(a)$ の割り当て (関数 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$) で次の2つを満たすもの

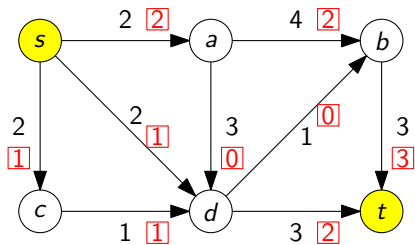
2 各弧 $a \in A$ において,

(容量制約)

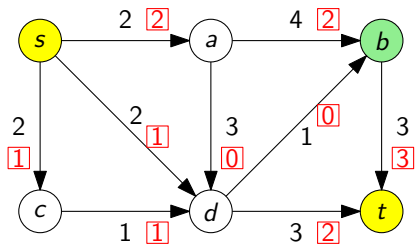
$$0 \leq f(a) \leq c(a)$$



これは流れか？ (1)

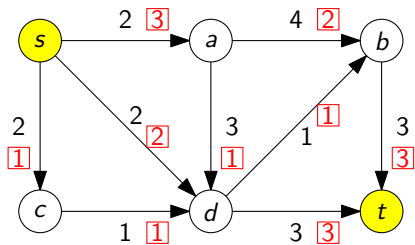


これは流れか？ (1)

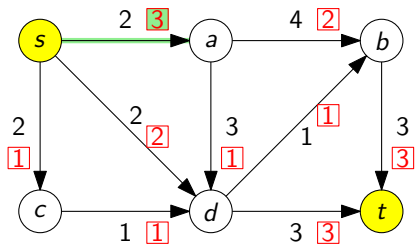


流れではない

これは流れか？ (2)

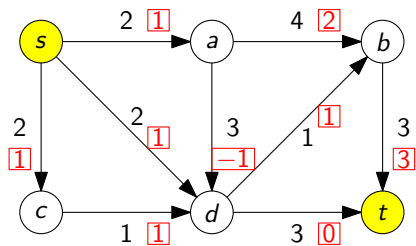


これは流れか？ (2)

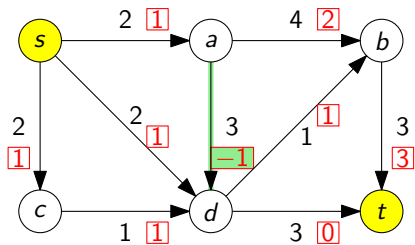


流れではない

これは流れか？ (3)

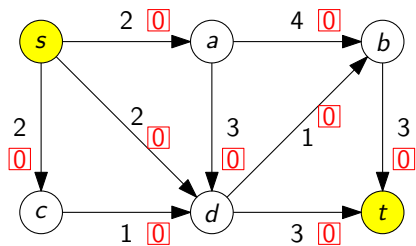


これは流れか？ (3)

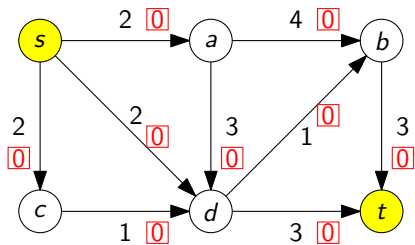


流れではない

これは流れか？ (4)



これは流れか？ (4)



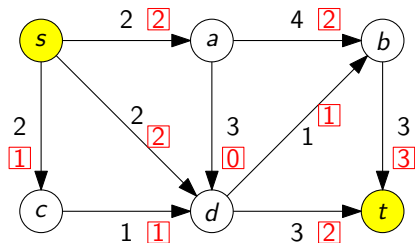
流れである

流れの値

定義：流れ f の値とは？

s から t へ至る流れ f の値を次の量で定義し、 $\text{val}(f)$ と表記する

$$\text{val}(f) = \sum_{u:(s,u) \in A} f((s,u)) - \sum_{u:(u,s) \in A} f((u,s))$$



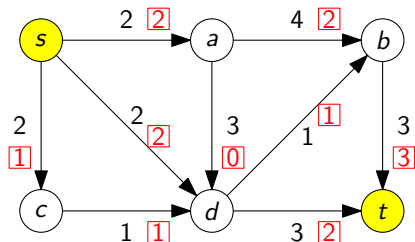
この流れの値は 5

最大流

定義：最大流とは？

s から t へ至る流れ f が**最大流**であるとは、

s から t へ至る任意の流れ f' に対して $\text{val}(f') \leq \text{val}(f)$ が成り立つこと



注：最大流が存在する，ということは当たり前ではない

記法の簡略化：流入，流出，純流入，純流出

s から t へ至る流れ $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

記法と用語

各頂点 $v \in V$ に対して，次のように記号を定義

$$\blacktriangleright f^+(v) = \sum_{u:(v,u) \in A} f((v,u)) \quad (v \text{ からの流出})$$

$$\blacktriangleright f^-(v) = \sum_{u:(u,v) \in A} f((u,v)) \quad (v \text{ への流入})$$

このとき，

$\blacktriangleright f^+(v) - f^-(v)$ は v における純流出

$\blacktriangleright f^-(v) - f^+(v)$ は v における純流入

$f^+(v) - f^-(v)$ を $\partial f(v)$ と書いて， f の v における境界と呼ぶことがある

記法の簡略化：流れの定義と流れの値の定義の書き換え

s から t へ至る流れ $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

つまり、次のように書き換えられる

流量保存制約

- ▶ 任意の頂点 $v \in V - \{s, t\}$ に対して, $f^+(v) = f^-(v)$

流れ f の値

- ▶ $\text{val}(f) = f^+(s) - f^-(s)$

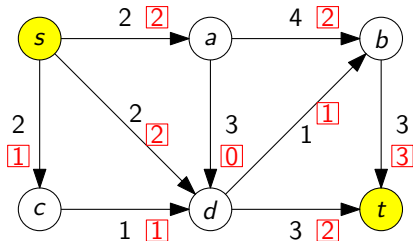
流れの総和 = 流出量の総和 = 流入量の総和

s から t へ至る流れ $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

次が成り立つ

$$\sum_{a \in A} f(a) = \sum_{v \in V} f^+(v) = \sum_{v \in V} f^-(v)$$

証明：演習問題 (ヒント：握手補題の証明を思い出す)



v	$f^+(v)$	$f^-(v)$
s	5	0
a	2	2
b	3	3
c	1	1
d	3	3
t	0	5
計	14	14

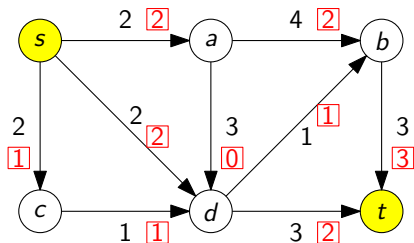
s における純流出 = t における純流入

次が成り立つ

s から t へ至る任意の流れ $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ に対して

$$f^+(s) - f^-(s) = f^-(t) - f^+(t)$$

(s における純流出) (t における純流入)



左辺 = 5 = 右辺

s における純流出 = t における純流入 : 証明

流量保存制約

- ▶ 任意の頂点 $v \in V - \{s, t\}$ に対して, $f^+(v) = f^-(v)$

s における純流出 = t における純流入 : 証明

流量保存制約

- ▶ 任意の頂点 $v \in V - \{s, t\}$ に対して, $f^+(v) = f^-(v)$

から,

- ▶
$$\sum_{v \in V - \{s, t\}} f^+(v) = \sum_{v \in V - \{s, t\}} f^-(v) \dots\dots\dots (1)$$

が得られる.

s における純流出 = t における純流入：証明

流量保存制約

- ▶ 任意の頂点 $v \in V - \{s, t\}$ に対して, $f^+(v) = f^-(v)$

から,

- ▶
$$\sum_{v \in V - \{s, t\}} f^+(v) = \sum_{v \in V - \{s, t\}} f^-(v) \dots\dots\dots (1)$$

が得られる。また,

- ▶
$$\sum_{v \in V} f^+(v) = \sum_{v \in V} f^-(v) \dots\dots\dots (2)$$

となる

s における純流出 = t における純流入：証明

流量保存制約

- ▶ 任意の頂点 $v \in V - \{s, t\}$ に対して, $f^+(v) = f^-(v)$

から,

- ▶
$$\sum_{v \in V - \{s, t\}} f^+(v) = \sum_{v \in V - \{s, t\}} f^-(v) \dots\dots\dots (1)$$

が得られる。また,

- ▶
$$\sum_{v \in V} f^+(v) = \sum_{v \in V} f^-(v) \dots\dots\dots (2)$$

となるので, 式(2) - 式(1)より,

- ▶ $f^+(s) + f^+(t) = f^-(s) + f^-(t)$

が得られる。

s における純流出 = t における純流入：証明

流量保存制約

- ▶ 任意の頂点 $v \in V - \{s, t\}$ に対して, $f^+(v) = f^-(v)$

から,

- ▶
$$\sum_{v \in V - \{s, t\}} f^+(v) = \sum_{v \in V - \{s, t\}} f^-(v) \dots\dots\dots (1)$$

が得られる。また,

- ▶
$$\sum_{v \in V} f^+(v) = \sum_{v \in V} f^-(v) \dots\dots\dots (2)$$

となるので, 式(2) - 式(1)より,

- ▶ $f^+(s) + f^+(t) = f^-(s) + f^-(t)$

が得られる。整理すると

- ▶ $f^+(s) - f^-(s) = f^-(t) - f^+(t)$

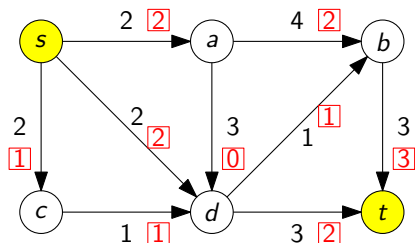
が得られる。



最大流問題が出てくる場面：配送問題

- ▶ 有向グラフは 道路ネットワーク をモデル化
- ▶ s は 部品工場 をモデル化
- ▶ t は 組立工場 をモデル化
- ▶ 弧の容量は 道幅 をモデル化

最大流問題 = できるだけ多くの部品を組み立て工場に運ぶには？



他の応用は後の講義で

補足：線形計画法との関連

『オペレーションズ・リサーチ基礎』履修者用の補足

最大流問題は線形計画問題としてモデル化できる

$$\text{最大化} \quad \sum_{u:(s,u) \in A} f((s,u)) - \sum_{u:(u,s) \in A} f((u,s))$$

$$\begin{aligned} \text{条件} \quad & \sum_{u:(u,v) \in A} f((u,v)) = \sum_{u:(v,u) \in A} f((v,u)) && \forall v \in V - \{s, t\} \\ & 0 \leq f(a) \leq c(a) && \forall a \in A \end{aligned}$$

つまり、

- ▶ 最大流問題には、線形計画問題の理論が適用できる
- ▶ 最大流問題は、線形計画問題に対するアルゴリズムで解ける

しかし、この視点を本講義では追い求めない (→ 『数理計画法』)

補足：線形計画法との関連

『オペレーションズ・リサーチ基礎』履修者用の補足

最大流問題は線形計画問題としてモデル化できる

$$\text{最大化} \quad \sum_{u:(s,u) \in A} f((s,u)) - \sum_{u:(u,s) \in A} f((u,s))$$

(線形の目的関数)

$$\text{条件} \quad \sum_{u:(u,v) \in A} f((u,v)) = \sum_{u:(v,u) \in A} f((v,u)) \quad \forall v \in V - \{s, t\}$$

$$0 \leq f(a) \leq c(a) \quad \forall a \in A$$

(線形の制約条件)

つまり、

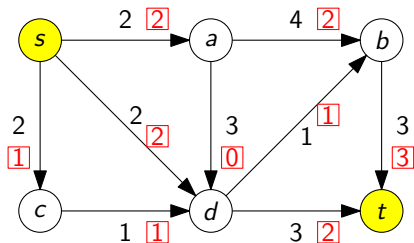
- ▶ 最大流問題には、線形計画問題の理論が適用できる
- ▶ 最大流問題は、線形計画問題に対するアルゴリズムで解ける

しかし、この視点を本講義では追い求めない (→ 『数理計画法』)

目次

- ① 最大流問題とは？
- ② 流れとカットの弱双対性
- ③ 流れとカットの強双対性：最大流最小カット定理
- ④ 今日のまとめ

疑問：流れと「対」になるものは何か？



この流れが最大流であることを証明するにはどうすればよいか？

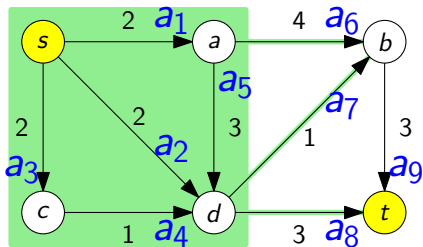
- ▶ ⇔ 流れと「対」になるものが何なのか考えたい

最大化	最小化
マッチング	頂点被覆
流れ	???

カット

定義： s, t カットとは？

s, t カットとは、頂点部分集合 S で、 $s \in S$ と $t \notin S$ を満たすもののこと



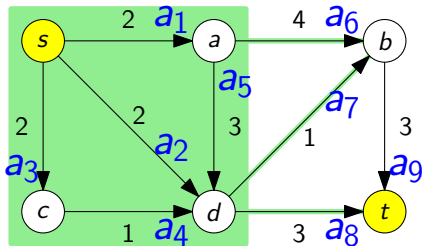
イメージ： s から t へ至る流れは S の側から $V - S$ の側に向かっていく

カットの容量

定義： s, t カットの容量とは？

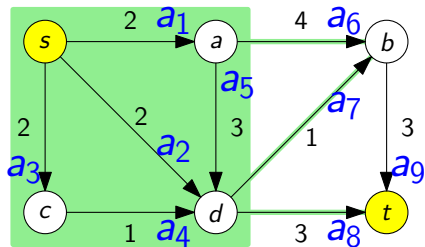
s, t カット S の容量とは、次の式で定義され、 $\text{cap}(S)$ と表記する

$$\text{cap}(S) = \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} c((u,v))$$



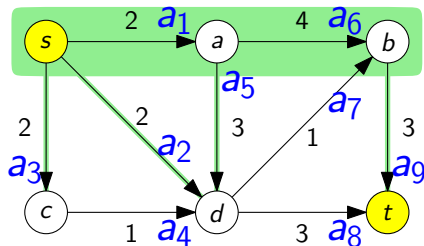
S に始点を持ち、 $V - S$ に終点を持つ弧の容量の合計

カット容量の例 (1)



$\{s, a, c, d\}$ は s, t カットで、その容量は 8

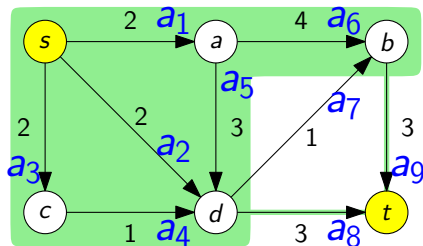
カット容量の例 (2)



$\{s, a, b\}$ は s, t カットで、その容量は 10

注意： a_7 の容量はカットの容量に含めない

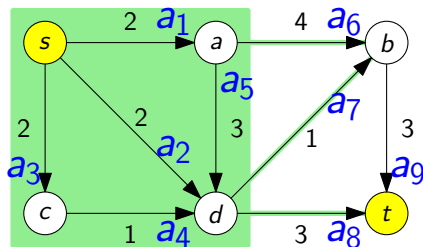
カット容量の例 (3)



$\{s, a, b, c, d\}$ は s, t カットで, その容量は 6

注意: a_7 の容量はカットの容量に含めない

カットの容量と流れ



直感

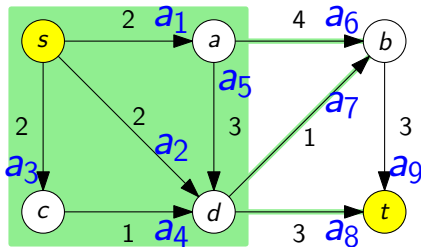
- ▶ s から t へ至る流れ f は S から $V - S$ へ向かっていく
- ▶ $\therefore \text{cap}(S)$ よりもたくさん s から t へ流れない
- ▶ $\therefore \text{val}(f) \leq \text{cap}(S)$

カットの容量と流れ：より厳密に

流れとカットの関係

s から t へ至る任意の流れ f と任意の s, t カット S に対して

$$\text{val}(f) \leq \text{cap}(S)$$



カットの容量と流れ：補題

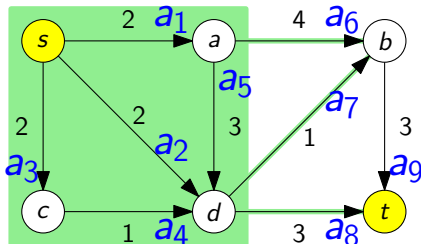
補題 A

s から t へ至る任意の流れ f と任意の s, t カット S に対して

$$\text{val}(f) = \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} f((u,v)) - \sum_{(u,v) \in A: u \notin S, v \in S} f((u,v))$$

(S から出る総流量) (S に入る総流量)

証明：演習問題



カットの容量と流れ：証明

証明したいこと：流れとカットの関係

s から t へ至る任意の流れ f と任意の s, t カット S に対して

$$\text{val}(f) \leq \text{cap}(S)$$

証明：

$$\text{val}(f) \stackrel{\text{(補題 A)}}{=} \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} f((u,v)) - \sum_{(u,v) \in A: u \notin S, v \in S} f((u,v))$$

カットの容量と流れ：証明

証明したいこと：流れとカットの関係

s から t へ至る任意の流れ f と任意の s, t カット S に対して

$$\text{val}(f) \leq \text{cap}(S)$$

証明：

$$\begin{aligned} \text{val}(f) &\stackrel{\text{(補題 A)}}{=} \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} f((u, v)) - \sum_{(u,v) \in A: u \notin S, v \in S} f((u, v)) \\ &\leq \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} f((u, v)) \quad \because f((u, v)) \geq 0 \end{aligned}$$

カットの容量と流れ：証明

証明したいこと：流れとカットの関係

s から t へ至る任意の流れ f と任意の s, t カット S に対して

$$\text{val}(f) \leq \text{cap}(S)$$

証明：

$$\begin{aligned} \text{val}(f) &\stackrel{\text{(補題 A)}}{=} \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} f((u,v)) - \sum_{(u,v) \in A: u \notin S, v \in S} f((u,v)) \\ &\leq \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} f((u,v)) \quad \because f((u,v)) \geq 0 \\ &\leq \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} c((u,v)) \quad \because f((u,v)) \leq c((u,v)) \end{aligned}$$

カットの容量と流れ：証明

証明したいこと：流れとカットの関係

s から t へ至る任意の流れ f と任意の s, t カット S に対して

$$\text{val}(f) \leq \text{cap}(S)$$

証明：

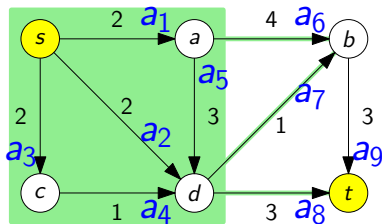
$$\begin{aligned}
 \text{val}(f) &\stackrel{\text{(補題 A)}}{=} \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} f((u,v)) - \sum_{(u,v) \in A: u \notin S, v \in S} f((u,v)) \\
 &\leq \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} f((u,v)) \quad \because f((u,v)) \geq 0 \\
 &\leq \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} c((u,v)) \quad \because f((u,v)) \leq c((u,v)) \\
 &= \text{cap}(S)
 \end{aligned}$$



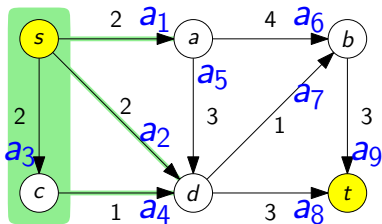
最小カット

定義：最小 s, t カットとは？

最小 s, t カットとは、 s, t カット S で、
 任意の s, t カット S' に対して、 $\text{cap}(S) \leq \text{cap}(S')$ を満たすもの



最小 s, t カットではない



最小 s, t カットである

流れとカットの関係：帰結

有向グラフ $G = (V, A)$, 容量 $c: A \rightarrow \mathbb{R}$, 2 頂点 $s, t \in V$

流れとカットの関係 (重要)

f が流れ
 S が s, t カット $\Rightarrow \text{val}(f) \leq \text{cap}(S)$

流れとカットの関係：帰結

有向グラフ $G = (V, A)$, 容量 $c: A \rightarrow \mathbb{R}$, 2 頂点 $s, t \in V$

流れとカットの関係 (重要)

f が流れ
 S が s, t カット $\Rightarrow \text{val}(f) \leq \text{cap}(S)$

最大流とカットの関係

f が最大流
 S が s, t カット $\Rightarrow \text{val}(f) \leq \text{cap}(S)$

流れとカットの関係：帰結

有向グラフ $G = (V, A)$, 容量 $c: A \rightarrow \mathbb{R}$, 2 頂点 $s, t \in V$

流れとカットの関係 (重要)

f が流れ
 S が s, t カット $\Rightarrow \text{val}(f) \leq \text{cap}(S)$

最大流とカットの関係

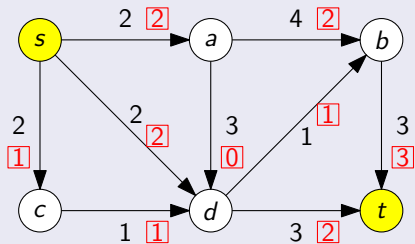
f が最大流
 S が s, t カット $\Rightarrow \text{val}(f) \leq \text{cap}(S)$

最大流と最小カットの関係 (弱双対性)

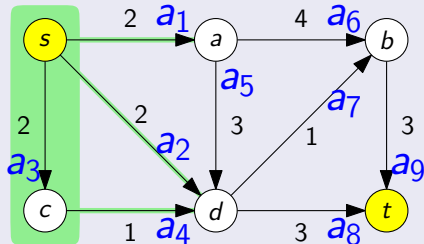
f が最大流
 S が最小 s, t カット $\Rightarrow \text{val}(f) \leq \text{cap}(S)$

弱双対性の使い方

下界

最大流の値 ≥ 5

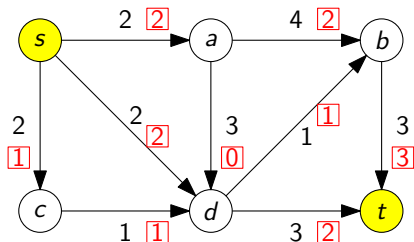
上界

最大流の値 ≤ 5

したがって

- ▶ 左の図にある流れは最大流であり、その値は5
- ▶ 右の図にある s, t カットは最小 s, t カットであり、その容量は5

疑問：流れと「対」になるものは何か？ — 解答編



この流れが最大流であることを証明するにはどうすればよいか？

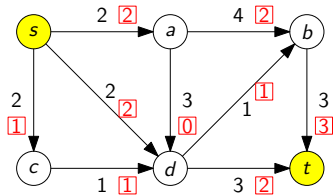
- ▶ \rightsquigarrow 流れと「対」になるものが何なのか考えたい
- ▶ \rightsquigarrow それは s, t カット !!!

最大化	最小化
マッチング	頂点被覆
流れ	s, t カット

目次

- ① 最大流問題とは？
- ② 流れとカットの弱双対性
- ③ 流れとカットの強双対性：最大流最小カット定理
- ④ 今日のまとめ

疑問：流れと「対」になるものは何か？ — 解答編 (再)



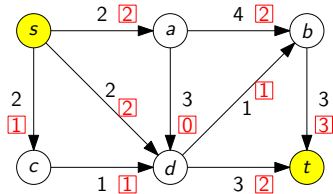
この流れが最大流であることを証明するにはどうすればよいか？

- ▶ ⇨ 流れと「対」になるものが何なのか考えたい
- ▶ ⇨ それは s, t カット !!!

問題点？

$\text{val}(f) = \text{cap}(S)$ となる f と S が存在しないかもしれない？

疑問：流れと「対」になるものは何か？ — 解答編 (再)



この流れが最大流であることを証明するにはどうすればよいか？

- ▶ \rightsquigarrow 流れと「対」になるものが何なのか考えたい
- ▶ \rightsquigarrow それは s, t カット !!!

問題点？

$\text{val}(f) = \text{cap}(S)$ となる f と S が存在しないかもしれない？

解決 \rightsquigarrow (最大流最小カット定理)

$\text{val}(f) = \text{cap}(S)$ となる f と S が必ず存在する !!

最大流最小カット定理

最大流最小カット定理 (強双対性)

(Ford, Fulkerson '56)

f が最大流
 S が最小 s, t カット $\Rightarrow \text{val}(f) = \text{cap}(S)$

注意

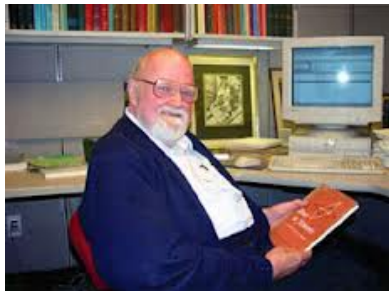
弱双対性

- ▶ $\text{val}(f) = \text{cap}(S)$ ならば f は最大流

強双対性

- ▶ $\text{val}(f) = \text{cap}(S)$ となる f, S が必ず存在

Lester R. Ford, Jr. と Delbert R. Fulkerson



L. R. Ford, Jr.
フォード
(1927-)



D. R. Fulkerson
ファルカーソン
(1924-1976)

https://arodrigu.webs.upv.es/grafos/doku.php?id=algoritmo_ford_fulkerson

最大流最小カット定理 — 証明に向けて

最大流最小カット定理 (強双対性)

(Ford, Fulkerson '56)

f が最大流
 S が最小 s, t カット $\Rightarrow \text{val}(f) = \text{cap}(S)$

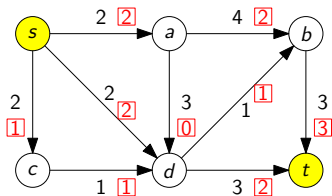
この講義では容量が整数の場合のみ証明する

- ▶ 容量が無理数の場合の証明は、この講義の範囲を超える (最後に補足)

証明法：アルゴリズムによる証明

最大流問題の解き方

- 1 線形計画問題としてモデル化し，線形計画法のアルゴリズムを使う
(\rightsquigarrow 『数理計画法』)
- 2 最大流問題独自のアルゴリズムを利用する
(特に，増加道法を紹介する)

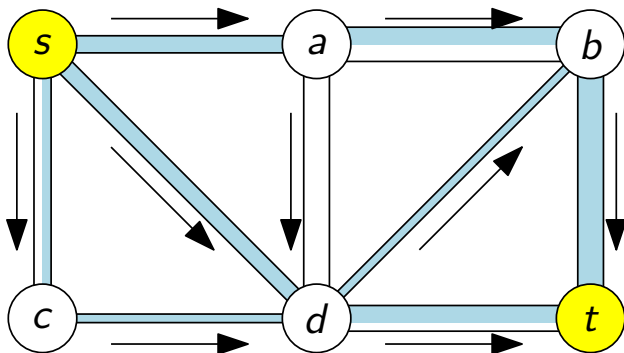


今からやること

増加道法を説明する

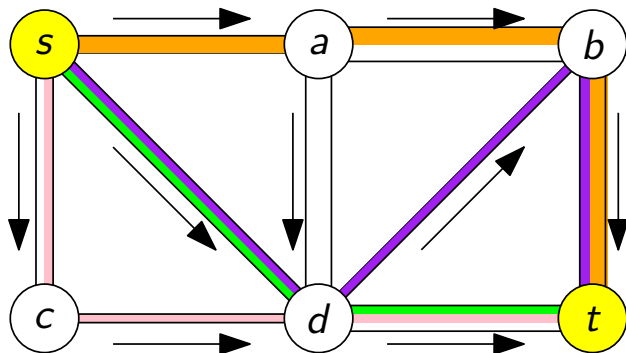
- ▶ 重要概念：補助ネットワーク，増加道

増加道法：基本アイデア



- ▶ 事実：「流れ」は「道に沿った流れ」に分解できる
- ▶ 方針：「道に沿った流れ」を次々と見つけていく

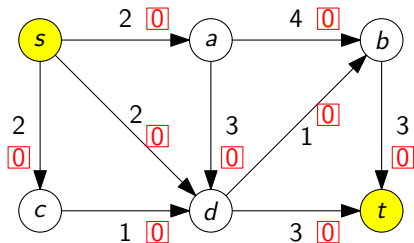
増加道法：基本アイデア



- ▶ 事実：「流れ」は「道に沿った流れ」に分解できる
- ▶ 方針：「道に沿った流れ」を次々と見つけていく

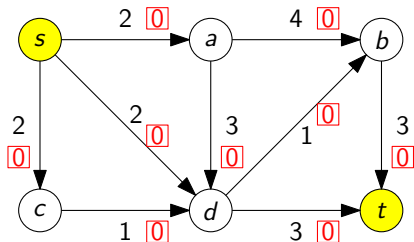
増加道法の動き (1)

任意の流れから始める (例えば, どの弧の上にも 0 だけ流れるもの)

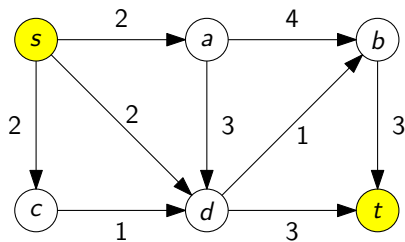


増加道法の動き (1)：補助ネットワークの作成

補助ネットワークを作る (残余ネットワークとも呼ばれる)



元のネットワーク

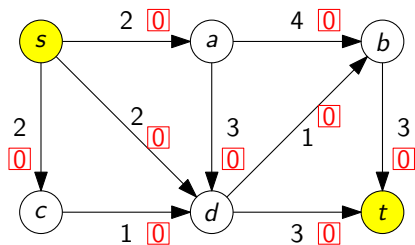


補助ネットワーク

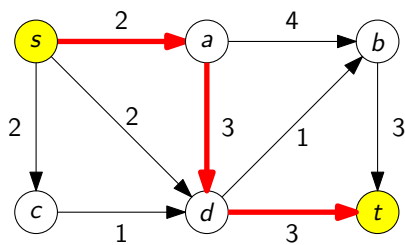
この場合は、始めのグラフと同じ
(次から変わるので、定義はそこで説明)

増加道法の動き (1)：増加道の発見

補助ネットワークにおいて、 s を始点、 t を終点とする道を見つける



元のネットワーク

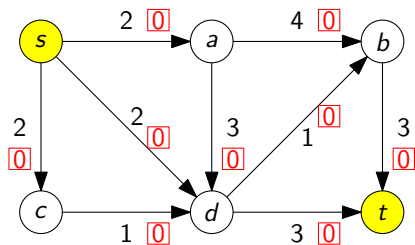


補助ネットワーク

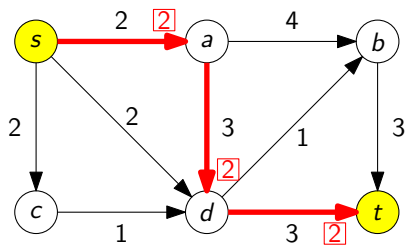
このような道を**増加道** (ぞうかどう) と呼ぶ

増加道法の動き (1)：流れの増加

道に沿って、できる限り流れを増加させる



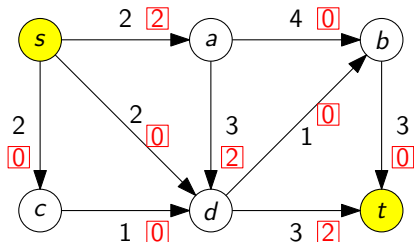
元のネットワーク



補助ネットワーク

増加道法の動き (2)

現在得られている流れ

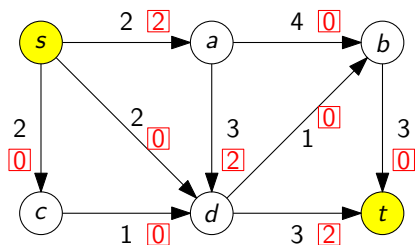


先ほどの手順を繰り返す

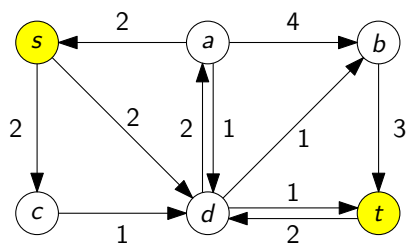
- ▶ 補助ネットワークの作成
- ▶ 増加道の発見
- ▶ 流れの増加

増加道法の動き (2)：補助ネットワークの作成

補助ネットワークを作る



元のネットワーク



補助ネットワーク

補助ネットワークとは？

- ▶ 頂点集合はもとの有向グラフと同じ
- ▶ 2 頂点間に弧がある \Leftrightarrow その弧を通してまだ流せる (逆向き弧に注意)
- ▶ 弧の容量 = 流せる最大量

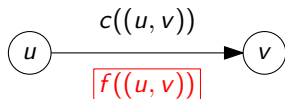
補助ネットワーク：定義

有向グラフ $G = (V, A)$, 容量 $c: A \rightarrow \mathbb{R}$, 2 頂点 s, t

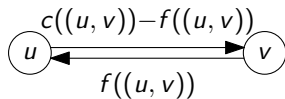
定義：流れ f に対する補助ネットワークとは？

流れ f に対する補助ネットワークは次で定義される

- ▶ 有向グラフ $G_f = (V, A_f)$, $A_f = A_f^F \cup A_f^B$
 - ▶ $A_f^F = \{(u, v) \mid (u, v) \in A, f((u, v)) < c((u, v))\}$ (順向きの弧集合)
 - ▶ $A_f^B = \{(v, u) \mid (u, v) \in A, f((u, v)) > 0\}$ (逆向きの弧集合)
- ▶ 容量 $c_f: A_f \rightarrow \mathbb{R}$
 - ▶ $(u, v) \in A_f^F$ のとき, $c_f((u, v)) = c((u, v)) - f((u, v))$
 - ▶ $(v, u) \in A_f^B$ のとき, $c_f((v, u)) = f((u, v))$



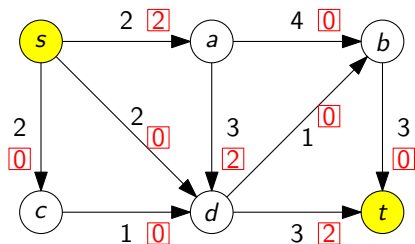
元のネットワーク



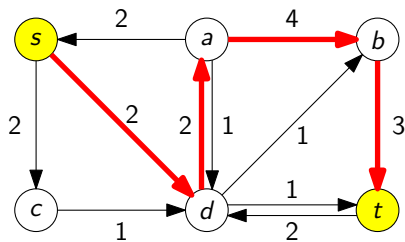
補助ネットワーク

増加道法の動き (2)：増加道の発見

補助ネットワークにおいて、 s を始点、 t を終点とする道を見つける



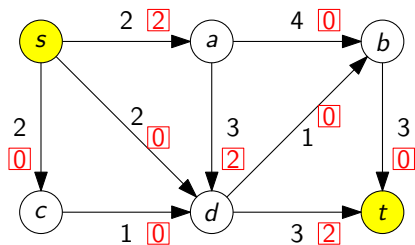
元のネットワーク



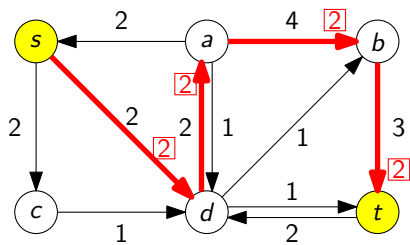
補助ネットワーク

増加道法の動き (2)：流れの増加

道に沿って、できる限り流れを増加させる



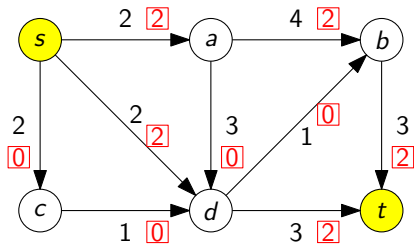
元のネットワーク



補助ネットワーク

増加道法の動き (3)

現在得られている流れ

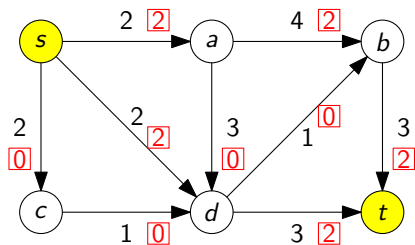


先ほどの手順を繰り返す

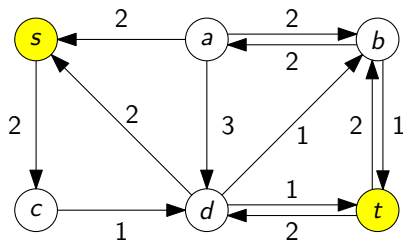
- ▶ 補助ネットワークの作成
- ▶ 増加道の発見
- ▶ 流れの増加

増加道法の動き (3)：補助ネットワークの作成

補助ネットワークを作る



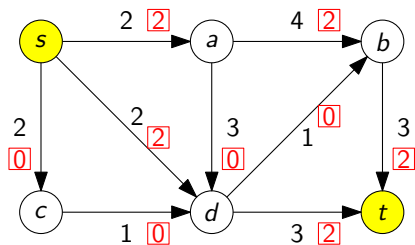
元のネットワーク



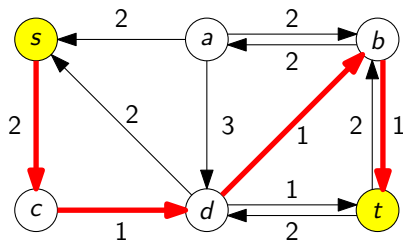
補助ネットワーク

増加道法の動き (3)：増加道の発見

補助ネットワークにおいて、 s を始点、 t を終点とする道を見つける



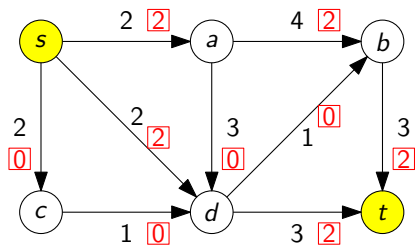
元のネットワーク



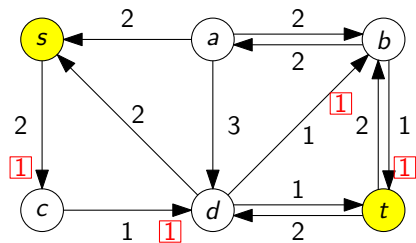
補助ネットワーク

増加道法の動き (3)：流れの増加

道に沿って、できる限り流れを増加させる



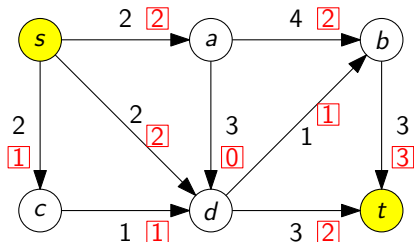
元のネットワーク



補助ネットワーク

増加道法の動き (4)

現在得られている流れ

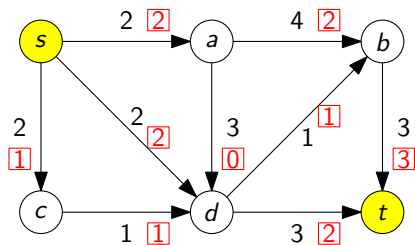


先ほどの手順を繰り返す

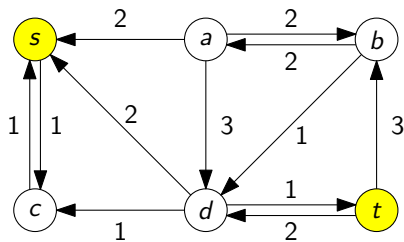
- ▶ 補助ネットワークの作成
- ▶ 増加道の発見
- ▶ 流れの増加

増加道法の動き (4)：補助ネットワークの作成

補助ネットワークを作る



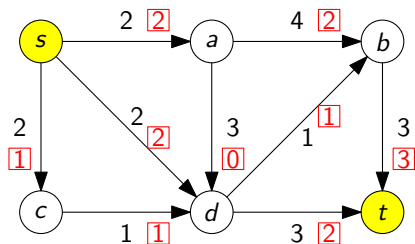
元のネットワーク



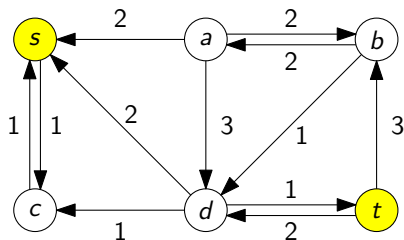
補助ネットワーク

増加道法の動き (4)：増加道の発見

補助ネットワークにおいて、 s を始点、 t を終点とする道を見つける



元のネットワーク

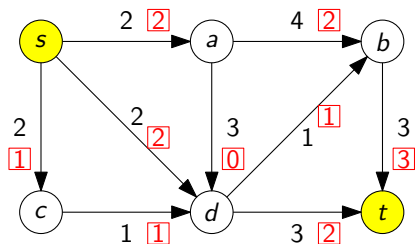


補助ネットワーク

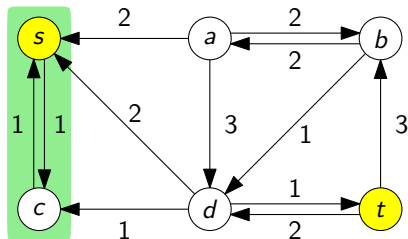
しかし、見つからない！ (存在しない) \rightsquigarrow アルゴリズムは次の段階へ

増加道法の動き (4)：到達可能頂点の探索

補助ネットワークにおいて、 s から到達可能な頂点をすべて見つける



元のネットワーク



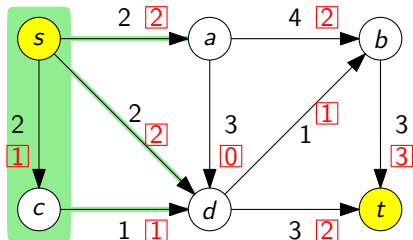
補助ネットワーク

$$S = \left\{ v \in V \mid \begin{array}{l} \text{補助ネットワークにおいて、} s \text{ を始点として、} \\ v \text{ を終点とする道が存在する} \end{array} \right\}$$

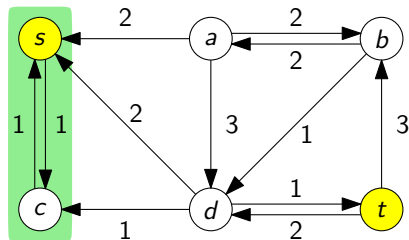
⇨ この S は s, t カットである (なぜか?)

増加道法の動き (4)：最小カットの発見

元の有向グラフにおいて、この s, t カット S の容量 $\text{cap}(S)$ を見る



元のネットワーク



補助ネットワーク

⇨ この容量 $\text{cap}(S)$ は得られた流れの値に等しい

- ▶ つまり、最大流と最小 s, t カットが得られた！ (アルゴリズム停止)

増加道法：動きのまとめ

有向グラフ $G = (V, A)$, 容量 $c: A \rightarrow \mathbb{R}$, 2 頂点 s, t

アルゴリズム：増加道法

初期化：流れ $f := 0$

- 1 f に対する補助ネットワーク (G_f と c_f) を作る
- 2 G_f において s を始点, t を終点とする道を見つける
- 3 存在するとき, その道に沿って流れを増加. 1 に戻る
- 4 存在しないとき, f を出力

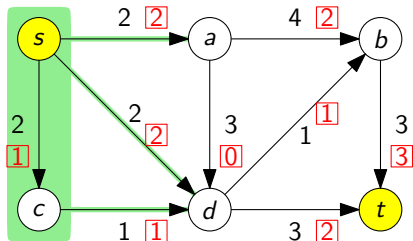
今から証明すること

- ▶ 増加道法が停止したとき, 最大流を出力すること (正当性)
- ▶ 増加道法が必ず停止すること (停止性)

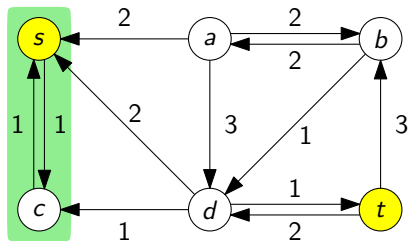
注：とりあえず, アルゴリズムの「効率性」は無視

増加道法の正当性：例

なぜ、これが最大流なのか？



元のネットワーク

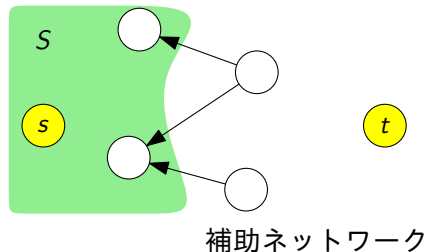
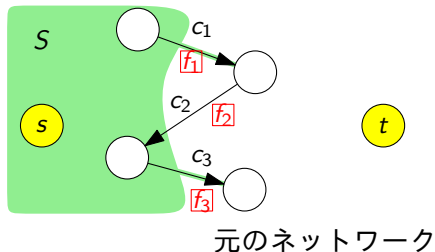


補助ネットワーク

- ▶ 補助ネットワークにおいて、 S から出ていく弧は存在しない
- ▶ S から出る総流量 = 5 なので, $\text{val}(f) \geq 5$
- ▶ 一方で, $\text{cap}(S) = 5$. つまり, $\text{val}(f) \leq 5$
- ▶ $\therefore \text{val}(f) = 5$ であり, $\text{cap}(S) = 5$

増加道法の正当性：証明 (1)

増加道法の正当性

増加道法が停止したとき、その出力 f は最大流である証明：増加道法が停止したときの状況を考える

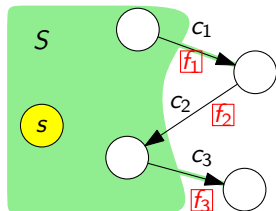
増加道法の正当性：証明 (1)

増加道法の正当性

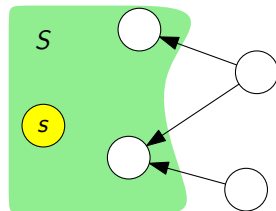
増加道法が停止したとき、その出力 f は最大流である

証明：増加道法が停止したときの状況を考える

- ▶ 出力 f に対する補助ネットワークにおいて、 s を始点とする有向道の終点全体の集合を S とする



元のネットワーク



補助ネットワーク

増加道法の正当性：証明 (1)

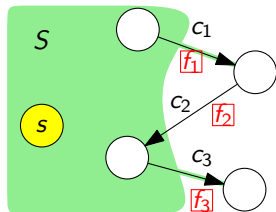
増加道法の正当性

増加道法が停止したとき、その出力 f は最大流である

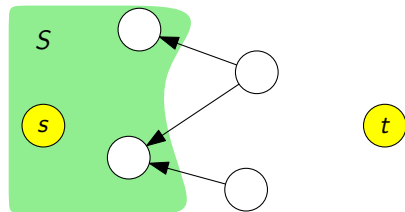
証明：増加道法が停止したときの状況を考える

- ▶ 出力 f に対する補助ネットワークにおいて、 s を始点とする有向道の終点全体の集合を S とする
- ▶ S は s, t カットである

(なぜか?)



元のネットワーク



補助ネットワーク

増加道法の正当性：証明 (1)

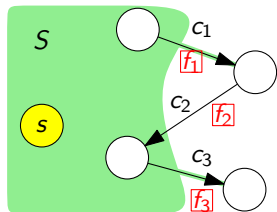
増加道法の正当性

増加道法が停止したとき、その出力 f は最大流である

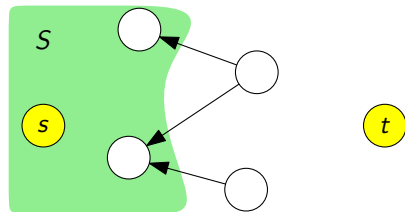
証明：増加道法が停止したときの状況を考える

- ▶ 出力 f に対する補助ネットワークにおいて、 s を始点とする有向道の終点全体の集合を S とする
- ▶ S は s, t カットである
- ▶ つまり、補助ネットワークの弧 $(u, v) \in A_f$ で $u \in S$ かつ $v \notin S$ となるものは存在しない

(なぜか?)



元のネットワーク

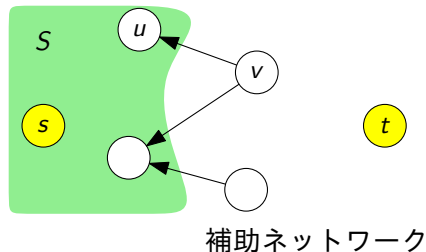
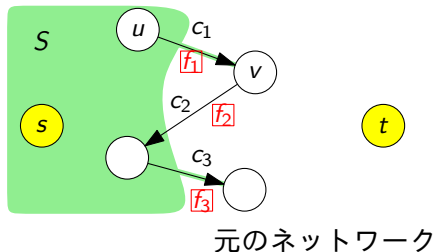


補助ネットワーク

増加道法の正当性：証明 (2)

元のネットワークの弧 $(u, v) \in A$ で $u \in S, v \notin S$ であるものを考える

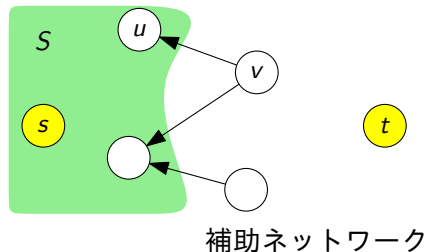
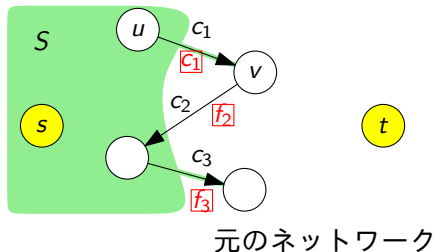
- ▶ $(u, v) \notin A_f$ であるので、特に $(u, v) \notin A_f^E$
- ▶ $(u, v) \notin A_f^E$ より、 $f((u, v)) = c((u, v))$



増加道法の正当性：証明 (2)

元のネットワークの弧 $(u, v) \in A$ で $u \in S, v \notin S$ であるものを考える

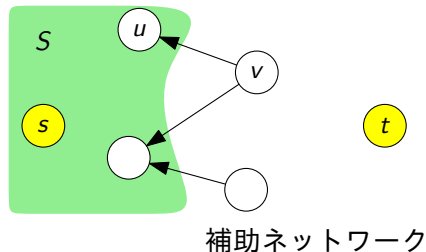
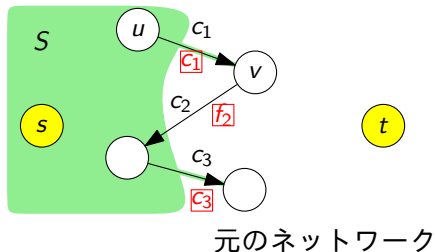
- ▶ $(u, v) \notin A_f$ であるので、特に $(u, v) \notin A_f^E$
- ▶ $(u, v) \notin A_f^E$ より、 $f((u, v)) = c((u, v))$



増加道法の正当性：証明 (2)

元のネットワークの弧 $(u, v) \in A$ で $u \in S, v \notin S$ であるものを考える

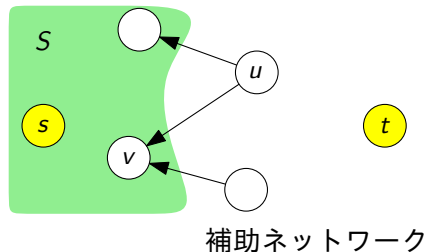
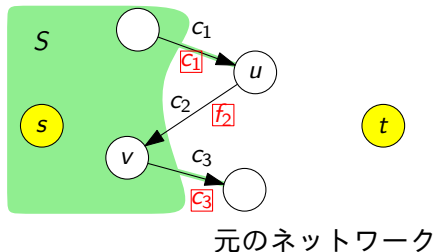
- ▶ $(u, v) \notin A_f$ であるので、特に $(u, v) \notin A_f^E$
- ▶ $(u, v) \notin A_f^E$ より、 $f((u, v)) = c((u, v))$



増加道法の正当性：証明 (3)

元のネットワークの弧 $(u, v) \in A$ で $u \notin S, v \in S$ であるものを考える

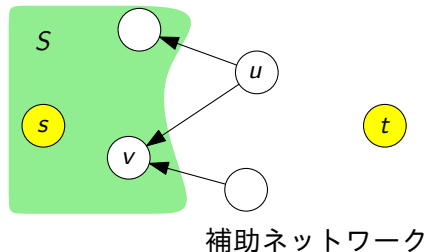
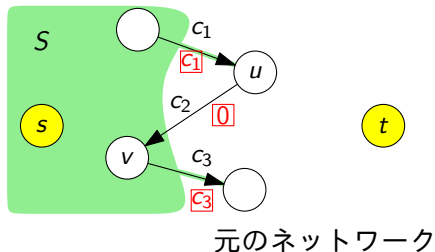
- ▶ $(v, u) \notin A_f$ であるので、特に $(v, u) \notin A_f^B$
- ▶ $(v, u) \notin A_f^B$ より、 $f((u, v)) = 0$



増加道法の正当性：証明 (3)

元のネットワークの弧 $(u, v) \in A$ で $u \notin S, v \in S$ であるものを考える

- ▶ $(v, u) \notin A_f$ であるので、特に $(v, u) \notin A_f^B$
- ▶ $(v, u) \notin A_f^B$ より、 $f((u, v)) = 0$



増加道法の正当性：証明 (4)

以上をまとめると

$$\text{val}(f) \stackrel{\text{(補題 A)}}{=} \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} f((u,v)) - \sum_{(u,v) \in A: u \notin S, v \in S} f((u,v))$$

補足

この S は最小 s, t カットである

増加道法の正当性：証明 (4)

以上をまとめると

$$\begin{aligned}
 \text{val}(f) &\stackrel{\text{(補題 A)}}{=} \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} f((u,v)) - \sum_{(u,v) \in A: u \notin S, v \in S} f((u,v)) \\
 &= \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} c((u,v)) - \sum_{(u,v) \in A: u \notin S, v \in S} 0
 \end{aligned}$$

補足

この S は最小 s, t カットである

増加道法の正当性：証明 (4)

以上をまとめると

$$\begin{aligned}
 \text{val}(f) &\stackrel{\text{(補題 A)}}{=} \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} f((u,v)) - \sum_{(u,v) \in A: u \notin S, v \in S} f((u,v)) \\
 &= \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} c((u,v)) - \sum_{(u,v) \in A: u \notin S, v \in S} 0 \\
 &= \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} c((u,v))
 \end{aligned}$$

補足

この S は最小 s, t カットである

増加道法の正当性：証明 (4)

以上をまとめると

$$\begin{aligned}
 \text{val}(f) &\stackrel{\text{(補題 A)}}{=} \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} f((u,v)) - \sum_{(u,v) \in A: u \notin S, v \in S} f((u,v)) \\
 &= \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} c((u,v)) - \sum_{(u,v) \in A: u \notin S, v \in S} 0 \\
 &= \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} c((u,v)) \\
 &= \text{cap}(S)
 \end{aligned}$$

補足

この S は最小 s, t カットである

増加道法の正当性：証明 (4)

以上をまとめると

$$\begin{aligned}
 \text{val}(f) &\stackrel{\text{(補題 A)}}{=} \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} f((u,v)) - \sum_{(u,v) \in A: u \notin S, v \in S} f((u,v)) \\
 &= \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} c((u,v)) - \sum_{(u,v) \in A: u \notin S, v \in S} 0 \\
 &= \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} c((u,v)) \\
 &= \text{cap}(S)
 \end{aligned}$$

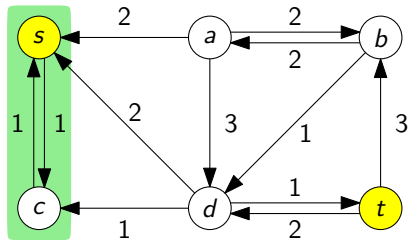
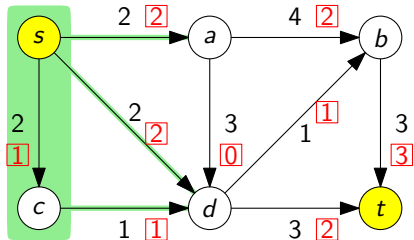
つまり、 $\text{val}(f) = \text{cap}(S)$ となり、弱双対性より、 f は最大流である \square

補足

この S は最小 s, t カットである

増加道法の停止性：略証

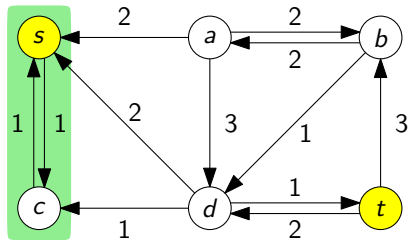
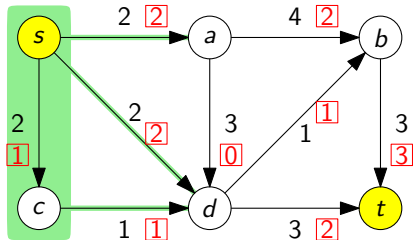
なぜ増加道法は停止するのか？



- ▶ 容量は整数なので，最小 s, t カットの容量も整数
- ▶ 容量は整数なので，補助ネットワークの容量も 1 以上の整数

増加道法の停止性：略証

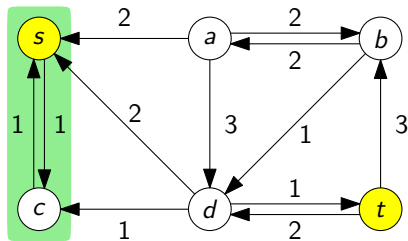
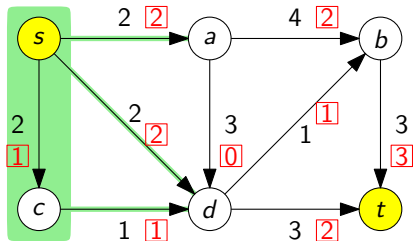
なぜ増加道法は停止するのか？



- ▶ 容量は整数なので，最小 s, t カットの容量も整数
- ▶ 容量は整数なので，補助ネットワークの容量も 1 以上の整数
- ▶ \therefore 反復が行われる度に，流れの値は 1 以上増える

増加道法の停止性：略証

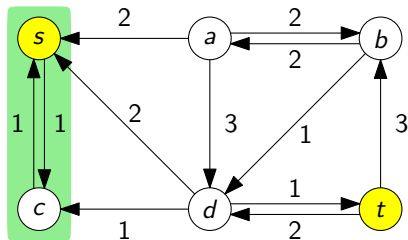
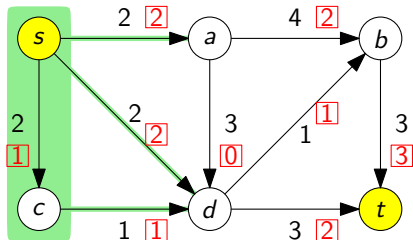
なぜ増加道法は停止するのか？



- ▶ 容量は整数なので，最小 s, t カットの容量も整数
- ▶ 容量は整数なので，補助ネットワークの容量も 1 以上の整数
- ▶ \therefore 反復が行われる度に，流れの値は 1 以上増える
- ▶ \therefore 反復回数は高々最小 s, t カットの容量で，これは有限 □

整数流定理

- つまり、容量が整数であるならば、出力される最大流も整数



整数流定理 (重要)

容量が整数 \Rightarrow どの弧に流れる量も整数である最大流が存在

最大流の値が整数であり、なおかつ、どの弧に流れる量も整数

増加道法に対する注意

注意 1

弧の容量に無理数が出てくるとき、

- ▶ 増加道法が有限ステップで終了しないこともある
- ▶ 増加道法の収束先が最大流ではないこともある
- ▶ その2つが同時に起こることもある

注意 2

増加道法における、増加道の選び方は工夫できる

- ▶ 工夫しない (Ford-Fulkerson のアルゴリズム)
- ▶ 幅優先探索を用いる (Edmonds-Karp のアルゴリズム)

Edmonds-Karp のアルゴリズムは多項式時間アルゴリズムである
(Ford-Fulkerson のアルゴリズムはそうではない)

目次

- ① 最大流問題とは？
- ② 流れとカットの弱双対性
- ③ 流れとカットの強双対性：最大流最小カット定理
- ④ 今日のまとめ

今日のまとめ

今日の目標

最大流問題に関して次ができるようになる

- ▶ 「流れ」が何であるのか記述でき、基本性質を証明できる
- ▶ **流れとカットの双対性**により流れの最大性を証明できる

重要な定理

- ▶ 最大流最小カット定理
- ▶ 整数流定理

次回予告

最大流を用いた数理モデル化

残った時間の使い方

- ▶ 演習問題をやる
 - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
 - ▶ 教員と TA は巡回
- ▶ 退室時, 小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
 - ▶ 内容は何でも OK
 - ▶ 匿名で OK

目次

- ① 最大流問題とは？
- ② 流れとカットの弱双対性
- ③ 流れとカットの強双対性：最大流最小カット定理
- ④ 今日のまとめ