グラフとネットワーク　第 5 回
マッチング：モデル化

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2018 年 5 月 21 日

最終更新：2018 年 5 月 12 日　07:21

スケジュール 前半 (予定)

1. グラフの定義と次数：数理 (4/9)
2. 道と閉路：数理 (4/16)
3. 木：数理 (4/23)

* 休み (4/30)

4. マッチング：数理 (5/7)

* 休講 (5/14)

5. マッチング：モデル化 (5/21)
6. 最大流：数理 (5/28)

- 中間試験 (6/4)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

7. 最大流：モデル化 (1) (6/11)
8. 最大流：モデル化 (2) (6/18)
9. 彩色：数理 (6/25)
10. 彩色：モデル化 (7/2)
- ＊ 休講 (7/9)
- ＊ 休み (7/16)
11. 平面グラフ：数理 (7/23)
12. 平面グラフ：モデル化 (7/30)
- 期末試験 (8/6？)

注意：予定の変更もありうる

この講義の概要 (シラバス掲載内容)

主題

離散最適化の入門として，次を概説する

- グラフとネットワークを用いた数理モデル化
- アルゴリズム的解法の背後にある数理

キャッチフレーズ：「本当の離散数学がここから始まる」

達成目標

以下の 4 項目をすべて達成すること

1. グラフやネットワークに関する用語を正しく使うことができる
2. 現実世界の諸問題をグラフやネットワークで表現し，数理モデルを構築できる
3. アルゴリズム的解法の背後にある数理，特に，最小最大定理の重要性を説明でき，それを用いて最適性の証明ができる
4. グラフとネットワークに関する簡単な数学的事実を証明できる

格言

- 「応用」ということばの意味は非常にあいまい
- 「応用」というときは，学問の階層を意識する

- 研究には段階がある
- 基礎研究の応用先は別の基礎研究かもしれない
- 基礎研究の応用先は応用研究かもしれない
- 応用研究の応用先は別の応用研究かもしれない
- 応用研究の応用先は基礎研究かもしれない
- 「応用」は実世界応用を意味しないかもしれない

今日の目標

最大マッチングを使って問題を解決する例を見る

- 除雪車の運行計画問題 (最小費用オイラーグラフ化)

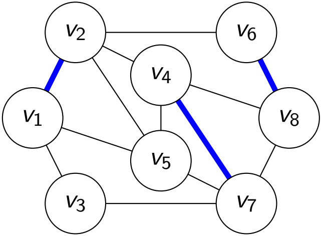
目次

グラフにおけるマッチング

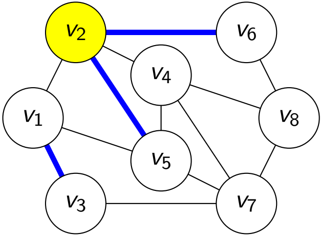
無向グラフ $G = (V, E)$

定義：マッチングとは？ (復習)

G の**マッチング**とは辺部分集合 $M \subseteq E$ で，
M のどの 2 辺も同じ頂点に接続しないもの



$\{\{v_1, v_2\}, \{v_4, v_7\}, \{v_6, v_8\}\}$ は
マッチングである



$\{\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_6\}\}$ は
マッチングではない

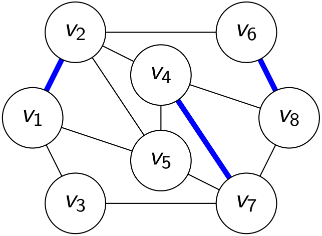
マッチングの辺 $e \in M$ は e の端点を**飽和**する

最大マッチング

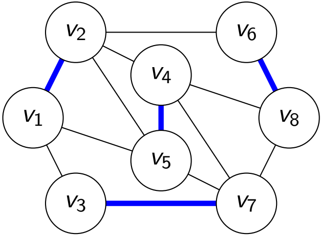
無向グラフ $G = (V, E)$

定義：最大マッチングとは？ (復習)

G の**最大マッチング**とは G のマッチング $M \subseteq E$ で,
G の任意のマッチング M' に対して $|M| \geq |M'|$ を満たすもの



最大マッチングではない



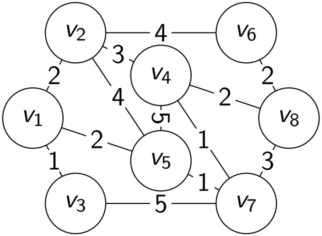
最大マッチングである

最大重みマッチング

無向グラフ $G = (V, E)$
各辺 $e \in E$ に対する非負重み $w(e) \geq 0$ (辺重み関数 $w \colon E \to \mathbb{R}$)

定義：最大重みマッチングとは？

w に関する G の**最大重みマッチング**とは
G のマッチング $M \subseteq E$ で,
G の任意のマッチング M' に対して $\sum_{e \in M} w(e) \geq \sum_{e \in M'} w(e)$ を満たすもの



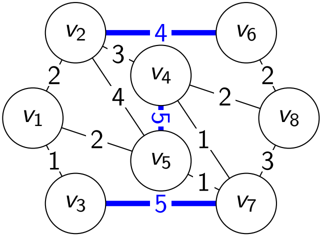
以後, $w(M) = \sum_{e \in M} w(e)$ と書く

最大重みマッチング

無向グラフ $G = (V, E)$
各辺 $e \in E$ に対する非負重み $w(e) \geq 0$ (辺重み関数 $w\colon E \to \mathbb{R}$)

定義：最大重みマッチングとは？

w に関する G の**最大重みマッチング**とは
G のマッチング $M \subseteq E$ で，
G の任意のマッチング M' に対して $\sum_{e \in M} w(e) \geq \sum_{e \in M'} w(e)$ を満たすもの



以後，$w(M) = \sum_{e \in M} w(e)$ と書く

完全グラフにおける最大重みマッチング

次は正しい (演習問題)

完全グラフ $G = (V, E)$，非負辺重み関数 $w \colon E \to \mathbb{R}$ に対して
G のある最大マッチングは w に関する G の最大重みマッチングである

次が正しいとは限らない (演習問題)

完全グラフ $G = (V, E)$，非負辺重み関数 $w \colon E \to \mathbb{R}$ に対して
G の任意の最大マッチングは w に関する G の最大重みマッチングである

次が正しいとは限らない (演習問題)

無向グラフ $G = (V, E)$，非負辺重み関数 $w \colon E \to \mathbb{R}$ に対して
w に関する G の任意の最大重みマッチングは G の最大マッチングである

最大重みマッチング問題

最大重みマッチング問題とは？

- 入力：無向グラフ $G = (V, E)$，非負辺重み関数 $w \colon E \to \mathbb{R}$
- 出力：G のマッチングで，重みが最大のもの

事実

最大重みマッチング問題は効率よく解くことができる　(Edmonds, '65)

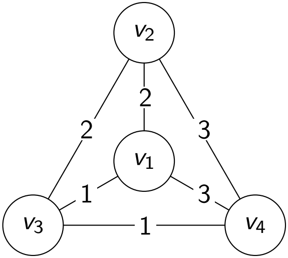
- Edmonds のアルゴリズムは，増加道を見つける手続きをサブルーチンとして用いている

「効率よく」 $= |V|$ と $|E|$ に関する多項式時間で

詳しくは『アルゴリズム論第一』,『アルゴリズム論第二』,『計算理論』で

最小重み完全マッチング

完全グラフ $G = (V, E)$，$|V|$ は偶数，非負辺重み関数 $w\colon E \to \mathbb{R}$



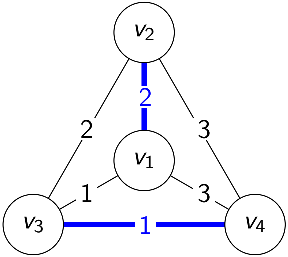
重みが最小の完全マッチングを見つけるには，どうすればよいか？

定義：完全マッチングとは？ (復習)

G の完全マッチングとは G のマッチング $M \subseteq E$ で，
G の任意の頂点に M のある辺が接続しているもの

最小重み完全マッチング

完全グラフ $G = (V, E)$，$|V|$ は偶数，非負辺重み関数 $w\colon E \to \mathbb{R}$



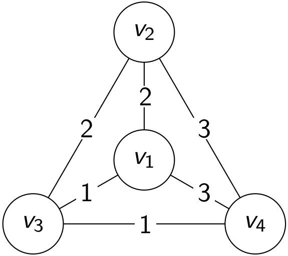
重みが最小の完全マッチングを見つけるには，どうすればよいか？

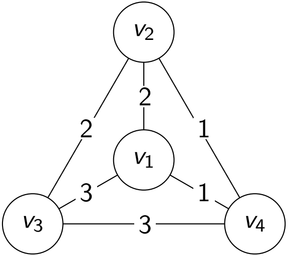
定義：完全マッチングとは？ (復習)

G の完全マッチングとは G のマッチング $M \subseteq E$ で，
G の任意の頂点に M のある辺が接続しているもの

最小重み完全マッチング問題を最大重みマッチング問題に帰着

完全グラフ $G = (V, E)$，$|V|$ は偶数，非負辺重み関数 $w \colon E \to \mathbb{R}$





辺重み：$w(e)$

$$w'(e) = \max\{w(f) \mid f \in E\} - w(e) + 1$$

最小重み完全マッチング問題を最大重みマッチング問題に帰着

完全グラフ $G = (V, E)$，$|V|$ は偶数，非負辺重み関数 $w\colon E \to \mathbb{R}$

演習問題

任意の辺 $e \in E$ に対して，$w'(e) = \max\{w(f) \mid f \in E\} - w(e) + 1$ としたとき

M が w に関する G の最小重み完全マッチングである $\Leftrightarrow$
M が w' に関する G の最大重みマッチングである

つまり，最小重み完全マッチングを見つけるためには，
最大重みマッチング問題が解ければよい　(帰着)

概要

今日の目標

最大マッチングを使って問題を解決する例を見る

- 除雪車の運行計画問題 (最小費用オイラーグラフ化)
  $\rightsquigarrow$ 完全グラフにおける最小重み完全マッチング

目次

除雪車の運行計画問題

除雪計画

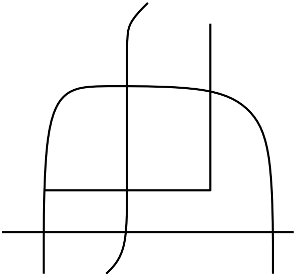
除雪車を効率よく運行するルートを決定したい

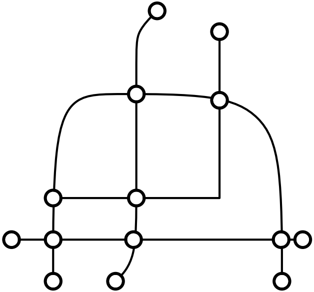
以下，除雪車が 1 台だけの場合を考える

http://www.city.niigata.lg.jp/kurashi/doro/road/doroizikanri/jyosetsu/rosenzu.html

交通網のモデル化

道路ネットワークをグラフとしてモデル化



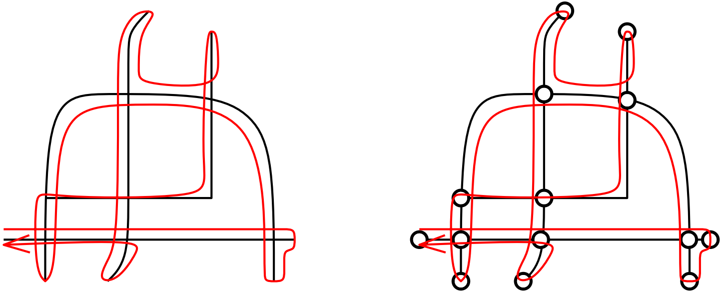


交差点，行き止まり	→	頂点
道路	→	辺

問題によっては有向グラフを使うこともある

除雪車が行わなくてはならないこと

すべての辺を最低 1 回は通って，元の場所に戻る



二度以上通っている辺には「無駄」がある
⇝ 「無駄」を最小化したい

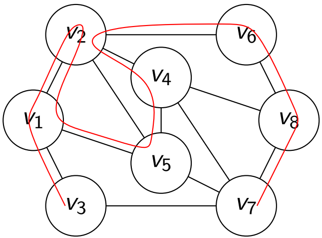
グラフにおける歩道

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：歩道とは？

G における**歩道**とは，頂点の列 $v_1, v_2, \ldots, v_k$ で
任意の $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ に対して，$\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ であるもの

直感的には「同じ頂点や辺を二度以上通ってよい道」



$v_3, v_1, v_2, v_1, v_5, v_4, v_2, v_6, v_8, v_7$ はこのグラフにおける歩道

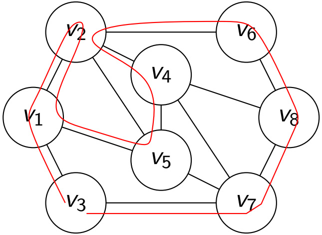
グラフにおける回路

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：回路とは？

G における回路 (または閉歩道) とは，歩道 $v_1, v_2, \ldots, v_k$ で $v_1 = v_k$ を満たすもののこと

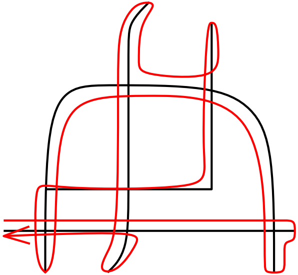
直感的には「同じ頂点や辺を二度以上通ってよい閉路」

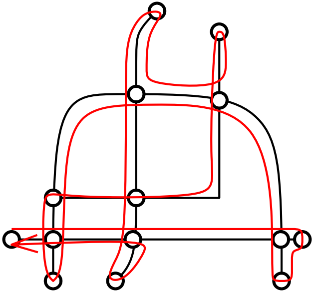


$v_3, v_1, v_2, v_1, v_5, v_4, v_2, v_6, v_8, v_7, v_3$ はこのグラフにおける回路

除雪車が行わなくてはならないこと

すべての辺を最低 1 回は通って，元の場所に戻る





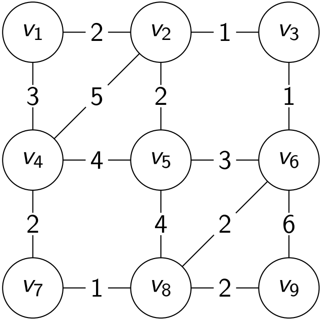
二度以上通っている辺には「無駄」がある
⇝ 「無駄」を最小化したい

行いたいこと

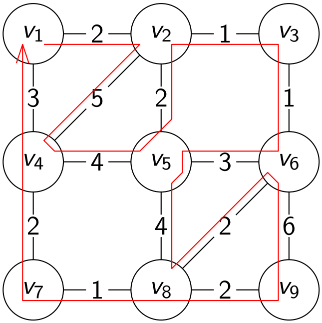
すべての辺を通る回路で,「長さ」が最小のものを見つけたい

長さ ＝ 辺の重み (長さ) の和

例題 1



例題 1



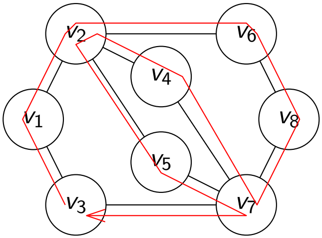
無駄のない除雪計画
(すべての辺をちょうど一度ずつ通る回路が存在)

オイラー回路

無向グラフ $G = (V, E)$

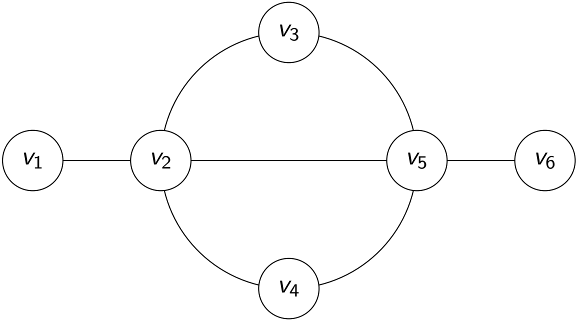
定義：オイラー回路とは？

G における**オイラー回路**とは，回路 $v_1, v_2, \ldots, v_k$ で
G のすべての辺をちょうど一度ずつ通るもの



オイラー回路を持たないグラフ

次のグラフはオイラー回路を持たない

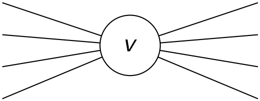


どんなグラフがオイラー回路を持ち，
どんなグラフがオイラー回路を持たないのだろうか？

オイラー回路を持つための必要条件

$G=(V,E)$ がオイラー回路 C を持つと仮定する

- 任意の頂点 $v \in V$ に着目する
- C は v に接続する辺をすべてちょうど一度ずつ通る
- その通り方を見てみる
- C において v が登場する前と後の辺が対になっている
- すなわち，v に接続する辺の数は偶数

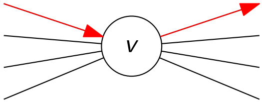


つまり，v の次数は偶数

オイラー回路を持つための必要条件

$G = (V, E)$ がオイラー回路 C を持つと仮定する

- 任意の頂点 $v \in V$ に着目する
- C は v に接続する辺をすべてちょうど一度ずつ通る
- その通り方を見てみる
- C において v が登場する前と後の辺が対になっている
- すなわち，v に接続する辺の数は偶数

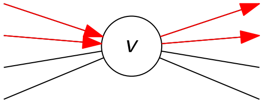


つまり，v の次数は偶数

オイラー回路を持つための必要条件

$G = (V, E)$ がオイラー回路 C を持つと仮定する

- 任意の頂点 $v \in V$ に着目する
- C は v に接続する辺をすべてちょうど一度ずつ通る
- その通り方を見てみる
- C において v が登場する前と後の辺が対になっている
- すなわち，v に接続する辺の数は偶数

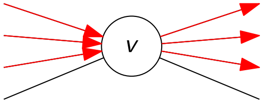


つまり，v の次数は偶数

オイラー回路を持つための必要条件

$G = (V, E)$ がオイラー回路 C を持つと仮定する

- 任意の頂点 $v \in V$ に着目する
- C は v に接続する辺をすべてちょうど一度ずつ通る
- その通り方を見てみる
- C において v が登場する前と後の辺が対になっている
- すなわち，v に接続する辺の数は偶数

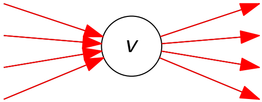


つまり，v の次数は偶数

オイラー回路を持つための必要条件

$G = (V, E)$ がオイラー回路 C を持つと仮定する

- 任意の頂点 $v \in V$ に着目する
- C は v に接続する辺をすべてちょうど一度ずつ通る
- その通り方を見てみる
- C において v が登場する前と後の辺が対になっている
- すなわち，v に接続する辺の数は偶数



つまり，v の次数は偶数

オイラー回路を持つための必要十分条件

連結無向グラフ $G = (V, E)$

オイラー回路を持つための必要十分条件

G がオイラー回路を持つ $\Leftrightarrow$ G の任意の頂点の次数が偶数

「$\Rightarrow$」の証明：演習問題 (前ページの内容がヒント)
「$\Leftarrow$」の証明の概略：辺数に関する帰納法

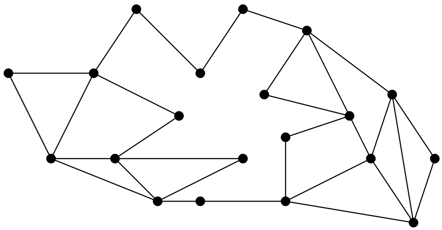
- $|E| = 0$ のときを考えると，G は辺数 0 のオイラー回路を持つ
- 任意の $k \geq 0$ を考える (注：累積帰納法)
- 辺数 k 以下の任意の連結無向グラフ G' に対して，
  G' の任意の頂点の次数が偶数であるならば，
  G' がオイラー回路を持つと仮定する

オイラー回路を持つための必要十分条件 (続 1)

証明すること

辺数 $k+1$ の任意の連結無向グラフ $G=(V,E)$ に対して，
G の任意の頂点の次数が偶数であるならば，
G がオイラー回路を持つ

- G が連結であり，任意の頂点次数が偶数であることを仮定
- G は連結なので，任意の頂点の次数は 2 以上

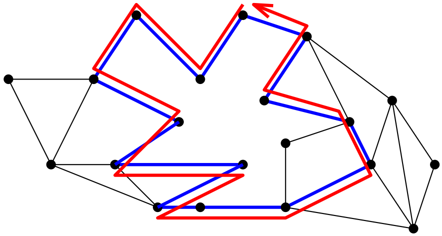


オイラー回路を持つための必要十分条件 (続 1)

証明すること

辺数 $k+1$ の任意の連結無向グラフ $G=(V,E)$ に対して，
G の任意の頂点の次数が偶数であるならば，
G がオイラー回路を持つ

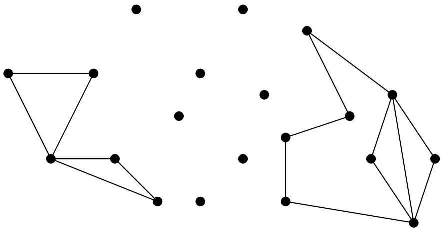
- G が連結であり，任意の頂点次数が偶数であることを仮定
- G は連結なので，任意の頂点の次数は 2 以上
- 演習問題 2.7 より，G は閉路を含む (それを C とする)



オイラー回路を持つための必要十分条件 (続 2)

G から C の辺をすべて取り除いたグラフを考える ($\tilde{G}$ とする)

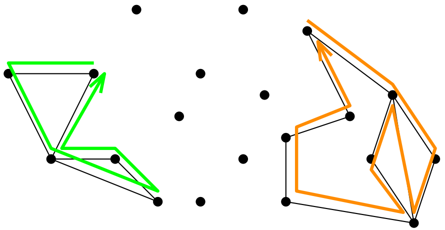
- C における各頂点の次数は 2 で，G の各頂点の次数は偶数なので，$\tilde{G}$ の各頂点の次数も偶数
- $\tilde{G}$ の連結成分を $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \ldots, \tilde{G}_k$ とする
- 各 $\tilde{G}_i$ の辺数は G の辺数未満
- したがって，$\tilde{G}_i$ はオイラー回路を含む (C_i とする)



オイラー回路を持つための必要十分条件 (続 2)

G から C の辺をすべて取り除いたグラフを考える ($\tilde{G}$ とする)

- C における各頂点の次数は 2 で，G の各頂点の次数は偶数なので，$\tilde{G}$ の各頂点の次数も偶数
- $\tilde{G}$ の連結成分を $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \ldots, \tilde{G}_k$ とする
- 各 $\tilde{G}_i$ の辺数は G の辺数未満
- したがって，$\tilde{G}_i$ はオイラー回路を含む (C_i とする)

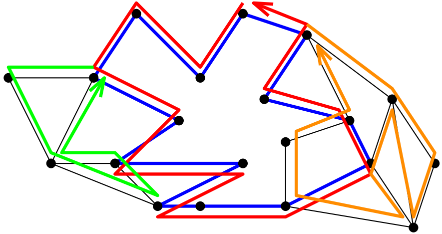


オイラー回路を持つための必要十分条件 (続 3)

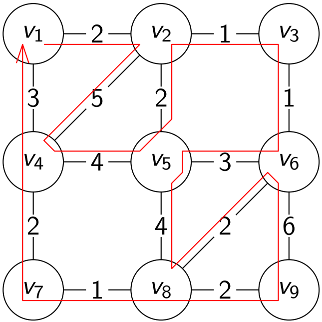
G から C の辺をすべて取り除いたグラフを考える ($\tilde{G}$ とする)

- $C_1, \ldots, C_k$ と C を組み合わせることで, G のオイラー回路を構成できる (詳細は演習問題)

$\square$



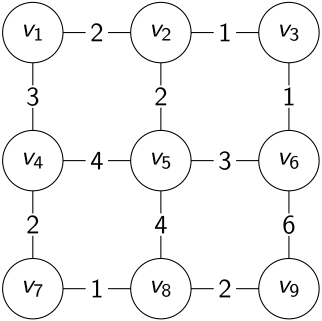
例題 1 (再び)



各頂点の次数が偶数

- ∴ オイラー回路が存在
- ∴ 無駄のない除雪が可能

例題 2

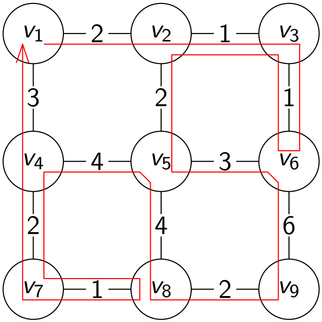


次数が奇数である頂点が存在

- ∴ オイラー回路が存在しない
- ∴ 無駄のない除雪が可能ではない
- $\rightsquigarrow$ 無駄を最小化したい

「仮想的な道路」を付け加えて，オイラー回路があるようにする

例題 2

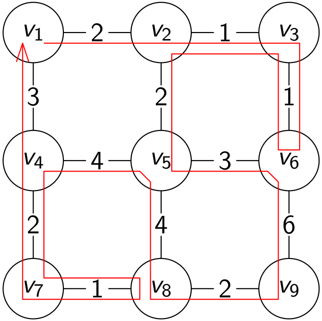


次数が奇数である頂点が存在

- $\therefore$ オイラー回路が存在しない
- $\therefore$ 無駄のない除雪が可能ではない
- $\rightsquigarrow$ 無駄を最小化したい

「仮想的な道路」を付け加えて，オイラー回路があるようにする

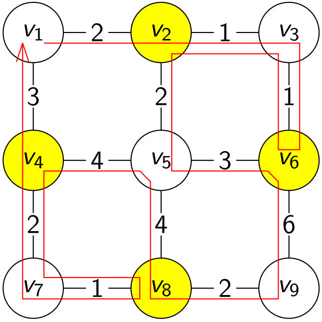
例題 2：仮想的な道路を追加



- 次数が奇数である頂点間に辺を引いて，すべての頂点の次数が偶数であるようにする
- 次数が奇数である頂点の数は偶数 (演習問題)
- ∴ これは必ず可能 !!

疑問：無駄を抑えるには，どのように辺を引けばよいか？

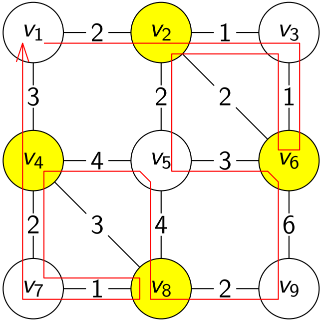
例題 2：仮想的な道路を追加



- 次数が奇数である頂点間に辺を引いて，すべての頂点の次数が偶数であるようにする
- 次数が奇数である頂点の数は偶数 (演習問題)
- ∴ これは必ず可能 !!

疑問：無駄を抑えるには，どのように辺を引けばよいか？

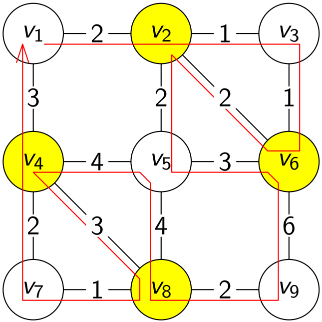
例題 2：仮想的な道路を追加



- 次数が奇数である頂点間に辺を引いて，すべての頂点の次数が偶数であるようにする
- 次数が奇数である頂点の数は偶数 (演習問題)
- ∴ これは必ず可能 !!

疑問：無駄を抑えるには，どのように辺を引けばよいか？

例題 2：仮想的な道路を追加

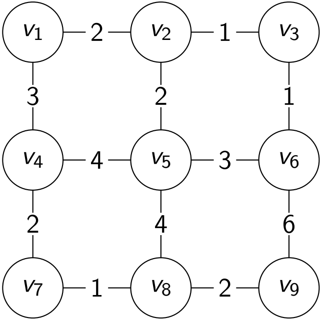


- 次数が奇数である頂点間に辺を引いて，すべての頂点の次数が偶数であるようにする
- 次数が奇数である頂点の数は偶数 (演習問題)
- ∴ これは必ず可能 !!

疑問：無駄を抑えるには，どのように辺を引けばよいか？

無駄を抑える辺の引き方

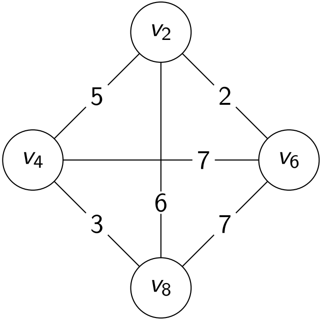
次数が奇数である頂点の間で，最も効率的な経路の長さを考える



	v_2	v_4	v_6	v_8
v_2	−	5	2	6
v_4		−	7	3
v_6			−	7
v_8				−

無駄を抑える辺の引き方 $\rightsquigarrow$ 最小重み完全マッチング：モデル化

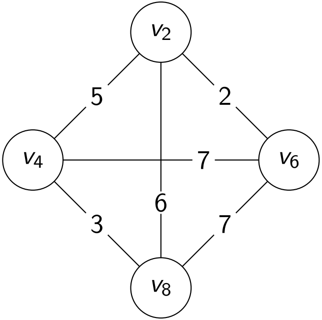
次のような完全グラフと非負辺重みを考える



	v_2	v_4	v_6	v_8
v_2	–	5	2	6
v_4		–	7	3
v_6			–	7
v_8				–

無駄を抑える辺の引き方 ⇝ 最小重み完全マッチング：モデル化

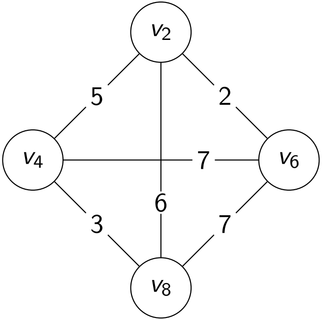
各頂点は元のグラフにおいて次数が奇数である頂点 (注：頂点数は偶数)



	v_2	v_4	v_6	v_8
v_2	–	5	2	6
v_4		–	7	3
v_6			–	7
v_8				–

無駄を抑える辺の引き方 $\rightsquigarrow$ 最小重み完全マッチング：モデル化

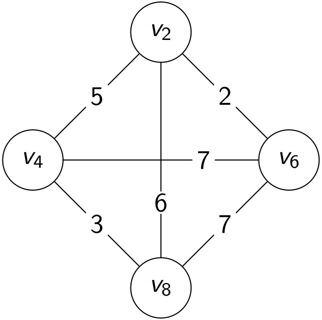
辺の重みは，対応する 2 頂点間の最短経路長



	v_2	v_4	v_6	v_8
v_2	–	5	2	6
v_4		–	7	3
v_6			–	7
v_8				–

無駄を抑える辺の引き方 ⇝ 最小重み完全マッチング：モデル化

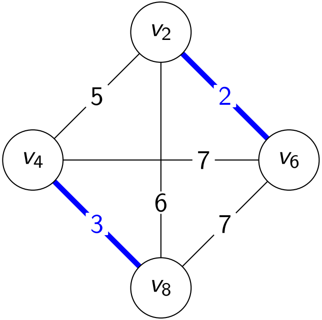
求めたいものは，最小重み完全マッチング



	v_2	v_4	v_6	v_8
v_2	–	5	2	6
v_4		–	7	3
v_6			–	7
v_8				–

無駄を抑える辺の引き方 ⇝ 最小重み完全マッチング：求めた結果

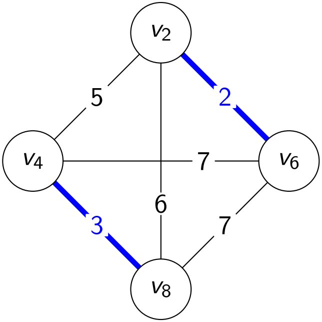
次のマッチングは最小重み完全マッチング

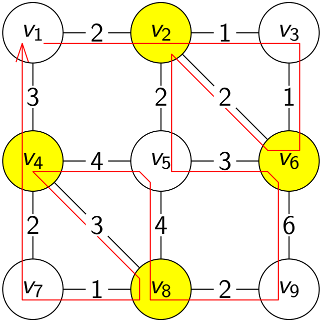


	v_2	v_4	v_6	v_8
v_2	–	5	2	6
v_4		–	7	3
v_6			–	7
v_8				–

無駄を抑える辺の引き方 ⇝ 最小重み完全マッチング：求めた結果

次のマッチングは最小重み完全マッチング





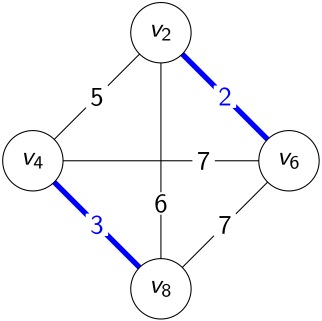
格言

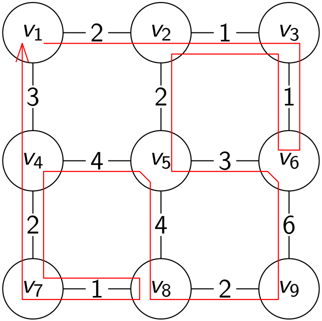
モデルに対する解を元の問題の文脈で必ず解釈し直す

これで解けた

無駄を抑える辺の引き方 ⇝ 最小重み完全マッチング：求めた結果

次のマッチングは最小重み完全マッチング





格言

モデルに対する解を元の問題の文脈で必ず解釈し直す

これで解けた

目次

概要

今日の目標

最大マッチングを使って問題を解決する例を見る

- 除雪車の運行計画問題 (最小費用オイラーグラフ化)

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員と TA は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次