# グラフとネットワーク　第 1 回
# グラフの定義：数理

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2018 年 4 月 9 日

最終更新：2018 年 4 月 4 日　11:45

# 概要

## 主題

離散最適化の入門として，次を概説する

- グラフとネットワークを用いた数理モデル化
- アルゴリズム的解法の背後にある数理

キャッチフレーズ：「本当の離散数学がここから始まる」

## 達成目標

以下の 4 項目をすべて達成すること

1. グラフやネットワークに関する用語を正しく使うことができる
2. 現実世界の諸問題をグラフやネットワークで表現し，数理モデルを構築できる
3. アルゴリズム的解法の背後にある数理，特に，最小最大定理の重要性を説明でき，それを用いて最適性の証明ができる
4. グラフとネットワークに関する簡単な数学的事実を証明できる

# どんな問題を扱うのか：例 1 — 優勝可能性の判定

## MLB アメリカンリーグ 東地区 1996 年 8 月 30 日 金曜日

| チーム名 | 勝 | 敗 | 残 | NYY | BAL | BOS | TOR | DET | 他地区 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| NYY | 75 | 59 | 28 | – | 3 | 8 | 7 | 3 | 7 |
| BAL | 71 | 63 | 28 | 3 | – | 2 | 7 | 4 | 12 |
| BOS | 69 | 66 | 27 | 8 | 2 | – | 0 | 0 | 17 |
| TOR | 63 | 72 | 27 | 7 | 7 | 0 | – | 0 | 13 |
| DET | 49 | 86 | 27 | 3 | 4 | 0 | 0 | – | 20 |

NYY ＝ ニューヨーク・ヤンキース，BAL ＝ ボルティモア・オリオールズ，
BOS ＝ ボストン・レッドソックス，TOR ＝ トロント・ブルージェイズ，
DET ＝ デトロイト・タイガース

## 優勝可能性判定問題

DET はまだ地区優勝が可能か？ (注：引き分けはない)

http://lyle.smu.edu/~olinick/riot/detroit.html

# どんな問題を扱うのか：例 1 — 優勝可能性の判定

## MLB アメリカンリーグ 東地区 1996 年 8 月 30 日 金曜日

| チーム名 | 勝 | 敗 | 残 | NYY | BAL | BOS | TOR | DET | 他地区 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| NYY | 75 | 59 | 28 | – | 3 | 8 | 7 | 3 | 7 |
| BAL | 71 | 63 | 28 | 3 | – | 2 | 7 | 4 | 12 |
| BOS | 69 | 66 | 27 | 8 | 2 | – | 0 | 0 | 17 |
| TOR | 63 | 72 | 27 | 7 | 7 | 0 | – | 0 | 13 |
| DET | 49 | 86 | 27 | 3 | 4 | 0 | 0 | – | 20 |

NYY = ニューヨーク・ヤンキース，BAL = ボルティモア・オリオールズ，
BOS = ボストン・レッドソックス，TOR = トロント・ブルージェイズ，
DET = デトロイト・タイガース

## 優勝可能性判定問題

DET はまだ地区優勝が可能か？ (注：引き分けはない)

⇝ 最大流 http://lyle.smu.edu/~olinick/riot/detroit.html

# どんな問題を扱うのか：例 2 — センサネットワークにおける通信

## センサネットワークにおける通信

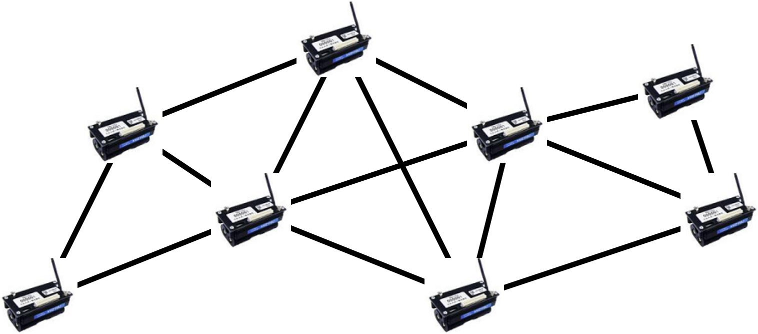
どのようにルーティング経路を設定すれば十分か？

http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/

# どんな問題を扱うのか：例 2 — センサネットワークにおける通信

## センサネットワークにおける通信

どのようにルーティング経路を設定すれば十分か？

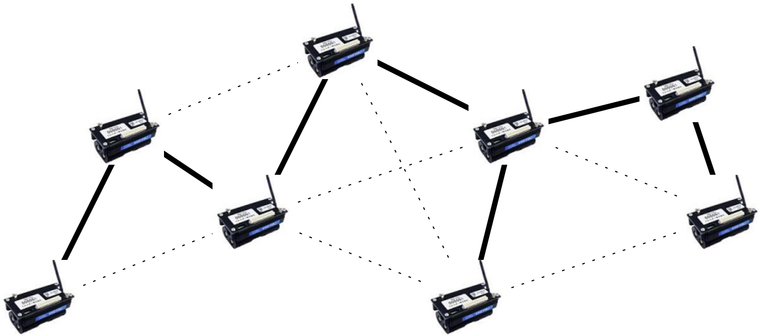


http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/

# どんな問題を扱うのか：例 2 — センサネットワークにおける通信

## センサネットワークにおける通信

どのようにルーティング経路を設定すれば十分か？

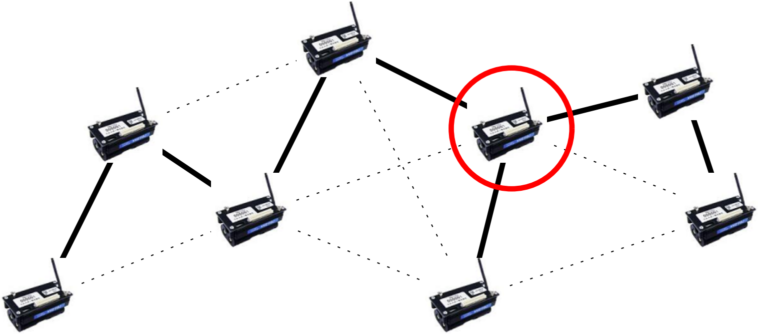


http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/

# どんな問題を扱うのか：例 2 — センサネットワークにおける通信

## センサネットワークにおける通信

どのようにルーティング経路を設定すれば十分か？

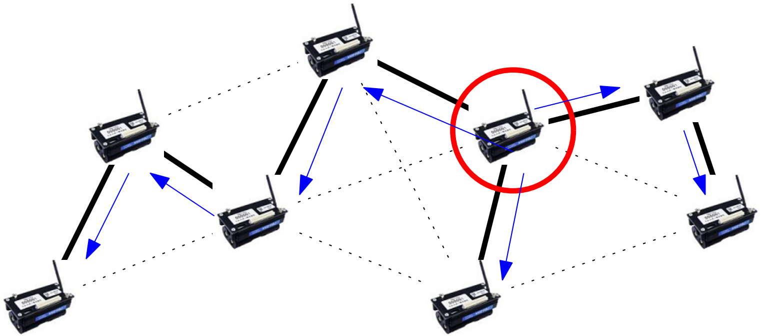


http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/

## どんな問題を扱うのか：例 2 — センサネットワークにおける通信

### センサネットワークにおける通信

どのようにルーティング経路を設定すれば十分か？

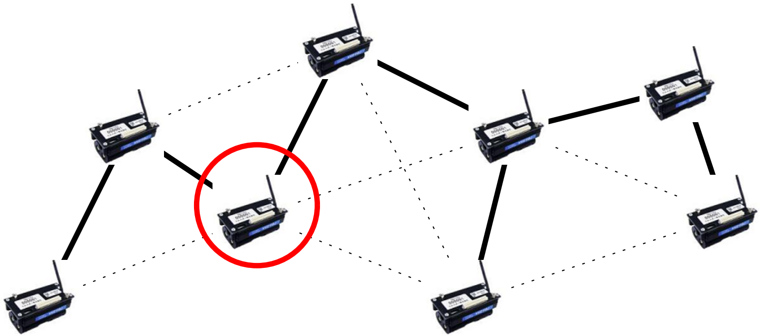


http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/

## どんな問題を扱うのか：例 2 — センサネットワークにおける通信

**センサネットワークにおける通信**

どのようにルーティング経路を設定すれば十分か？

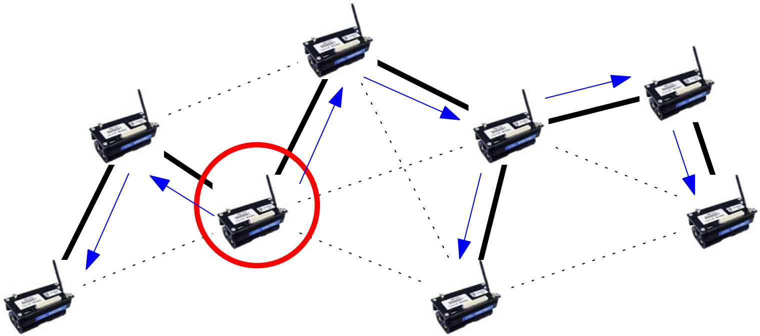


http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/

# どんな問題を扱うのか：例 2 — センサネットワークにおける通信

## センサネットワークにおける通信

どのようにルーティング経路を設定すれば十分か？

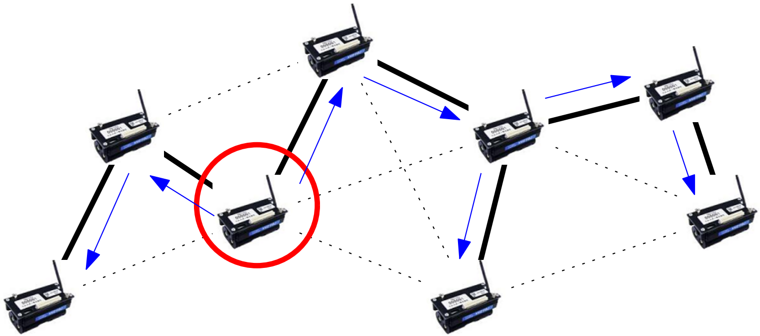


http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/

# どんな問題を扱うのか：例 2 — センサネットワークにおける通信

## センサネットワークにおける通信

どのようにルーティング経路を設定すれば十分か？



⇝ 全域木，連結性

http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/

## どんな問題を扱うのか：例 3 — 除雪計画

### 除雪計画

除雪車を効率よく運行するルートを決定したい


http://www.city.niigata.lg.jp/kurashi/doro/road/doroizikanri/jyosetsu/rosenzu.html

## どんな問題を扱うのか：例 3 — 除雪計画

### 除雪計画

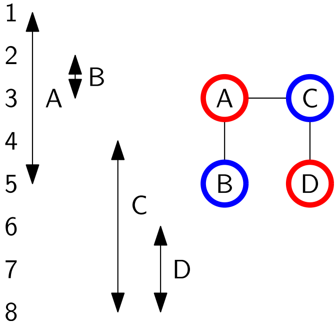
除雪車を効率よく運行するルートを決定したい


⇝ オイラー回路，マッチング

http://www.city.niigata.lg.jp/kurashi/doro/road/doroizikanri/jyosetsu/rosenzu.html

## どんな問題を扱うのか：例 4 — コンパイラにおけるレジスタ割当

```
1: A = 2
2: B = 3
3: B = B + 2
4: C = A + 1
5: A = C + 3
6: D = 4
7: D = C + 2
8: C = 3
```

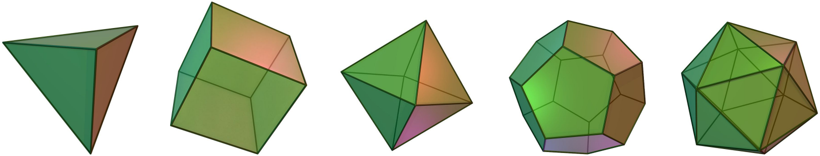



```
1: R1 = 2
2: R2 = 3
3: R2 = R2 + 2
4: R2 = R1 + 1
5: R1 = R2 + 3
6: R1 = 4
7: R1 = R2 + 2
8: R2 = 3
```

$\rightsquigarrow$ 彩色

## どんな問題を扱うのか：例 5 — 正多面体 (3 次元)

正多面体とは，各面が合同な正多角形であり，
各頂点に集まる面の数が同じであるような多面体のこと



正四面体　正六面体　正八面体　正十二面体　正二十面体

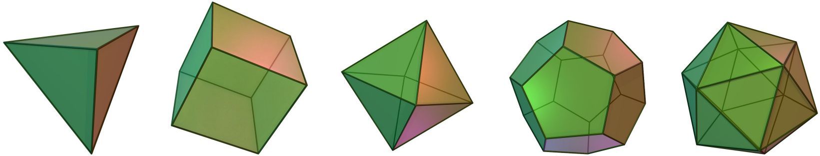
http://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid

**疑問**

この 5 つの他に，正多面体はあるのか？

# どんな問題を扱うのか：例 5 — 正多面体 (3 次元)

正多面体とは，各面が合同な正多角形であり，
各頂点に集まる面の数が同じであるような多面体のこと



正四面体　正六面体　正八面体　正十二面体　正二十面体

http://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid

**疑問**

この 5 つの他に，正多面体はあるのか？

**解答**

この 5 つの他に，正多面体は存在しない

$\rightsquigarrow$ 平面グラフ

## スケジュール 前半 (予定)

1. グラフの定義と次数：数理 (4/9)
2. 道と閉路：数理 (4/16)
3. 木：数理 (4/23)

* ∗ 休み (4/30)

4. マッチング：数理 (5/7)

* ∗ 休講 (5/14)

5. マッチング：モデル化 (5/21)
6. 最大流：数理 (5/28)

* 中間試験 (6/4)

注意：予定の変更もありうる

# スケジュール 後半 (予定)

7. 最大流：モデル化 (1) (6/11)
8. 最大流：モデル化 (2) (6/18)
9. 彩色：数理 (6/25)
10. 彩色：モデル化 (7/2)

* 休講 (7/9)
* 休み (7/16)

11. 平面グラフ：数理 (7/23)
12. 平面グラフ：モデル化 (7/30)

- 期末試験 (8/6？)

注意：予定の変更もありうる

## 情報

教員

- 岡本 吉央 (おかもと よしお)
- 居室：西 4 号館 2 階 206 号室
- E-mail：okamotoy@uec.ac.jp
- Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/

ティーチング・アシスタント

- 渡邉 光 (わたなべ ひかる)
- 居室：西 4 号館 2 階 202 号室 (岡本研究室)

講義資料

- Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2018/gn/
- 注意：資料の印刷等は各学生が自ら行う
- 講義の前の週の金曜の 18:00 までに，ここに置かれる

# 講義資料

## http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2018/gn/

- スライド
- 印刷用スライド：8 枚のスライドを 1 ページに収めたもの
- 演習問題
- 用語一覧
- Jupyter Notebook (Python 3)

「印刷用スライド」と「演習問題」は各自印刷して持参すると便利

## Twitter: @okamoto7yoshio

- 講義資料が掲載されたら一言発せられる (手動更新)

## 授業の進め方

$\boxed{\text{講義}}$ (75 分)

- スライドと板書で進める
- スライドのコピーに重要事項のメモを取る

$\boxed{\text{演習}}$ (15 分)

- 演習問題に取り組む
- 不明な点は教員に質問する

$\boxed{\text{退室}}$ (0 分) ←重要

- コメント (授業の感想，質問など) を紙に書いて提出する (匿名可)
- コメントとそれに対する回答は (匿名で) 講義ページに掲載される

$\boxed{\text{オフィスアワー}}$ (アポイントメントによる)

- 質問など

# 演習問題

**演習問題の進め方**

- 授業のおわり 15 分は演習問題を解く時間
- 残った演習問題は自習用 (復習・試験対策用)
- 注意 :「模範解答」のようなものは存在しない

**演習問題の種類**

- 復習問題：講義で取り上げた内容を反復
- 補足問題：講義で省略した内容を補足
- 追加問題：講義の内容に追加
- 発展問題：少し難しい (かもしれない)

## 演習問題 (続)

答案の提出

- 演習問題の答案をレポートとして提出してもよい
- レポートには提出締切がある (各回にて指定)
- レポートは採点されない (成績に勘案されない)
- レポートにはコメントがつけられて，返却される
  - 返却された内容については，再提出ができる (再提出締切は原則なし)
  - 再提出の際，返却された答案も添付しなくてはならない

## 評価

$\boxed{\text{中間試験}}$ と $\boxed{\text{期末試験}}$ のみによる

- 出題形式
  - 演習問題と同じ形式の問題を 4 題出題する
  - その中の 2 題以上は演習問題として提示されたものと同一である (ただし,「発展」として提示された演習問題は出題されない)
  - 全問に解答する
- 配点：1 題 15 点満点，計 60 点満点
- 時間：90 分 (おそらく)
- 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

$\boxed{\text{成績評価}}$

- min{100, 中間試験の素点 + 期末試験の素点 } による

# 格言

### 格言 (三省堂 大辞林)

短い言葉で、人生の真理や処世術などを述べ、教えや戒めとした言葉。「石の上にも三年」「沈黙は金」など。金言。

### 格言 (この講義における)

講義内容とは直接関係ないかもしれないが，
私 (岡本) が重要だと思うこと

### 格言 (の例)

単位取得への最短の道のりは，授業に出て，演習問題を解くこと

## 教科書・参考書

教科書

- 指定しない

参考書

- 藤重悟,「グラフ・ネットワーク・組合せ論」, 共立出版, 2002.
- 繁野麻衣子,「ネットワーク最適化とアルゴリズム」, 朝倉書店, 2010.
- R.J. ウィルソン (著), 西関隆夫, 西関裕子 (訳),「グラフ理論入門 原書第 4 版」, 近代科学社, 2001.
- 茨木俊秀, 永持仁, 石井利昌,「グラフ理論」, 朝倉書店, 2010.
- など

## この講義の約束

- 私語はしない (ただし，演習時間の相談は積極的に OK)
- 携帯電話等はマナーモードにする
- この講義と関係のないことを (主に電子機器で) しない
- 音を立てて睡眠しない

約束が守られない場合は退席してもらう場合あり

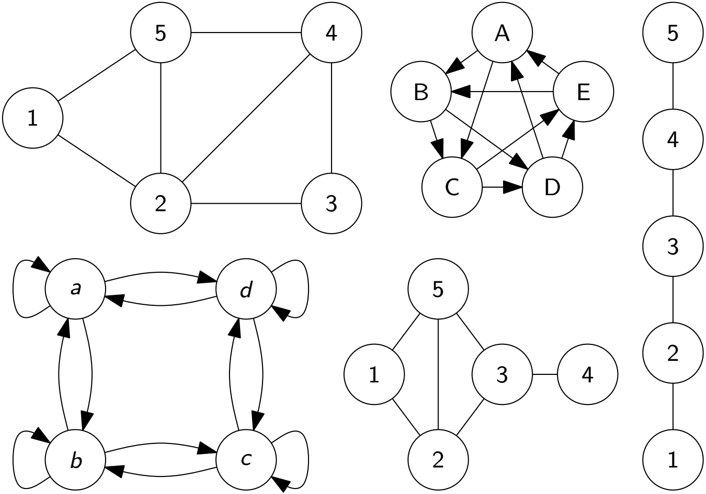
# 目次

## 概要

### 今日の目標

- グラフの定義を理解する
- 数え上げによる証明の手法を理解し，使えるようになる

## グラフの例



# 有向グラフ

## 有向グラフとは？

有向グラフとは，順序対 $(V, A)$ で，

- $V$ は集合
- $A \subseteq V \times V$ は $V$ の順序対の集合

であるもののこと

例：

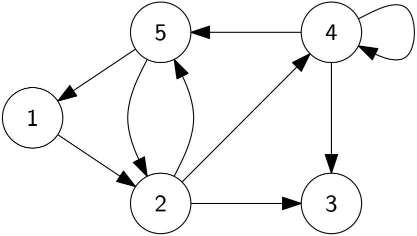
- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2)\}$

## 注意

$(2, 5) \neq (5, 2)$ (順序対では順序が大事)

# 有向グラフの図示

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2)\}$



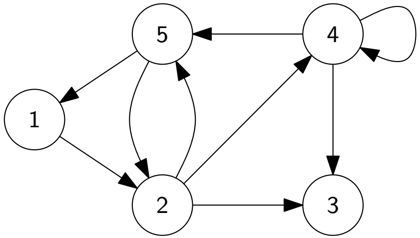
## 有向グラフの用語

有向グラフ $G = (V, A)$

### 有向グラフの用語

- $V$ の要素を $G$ の頂点と呼ぶ
- $V$ を $G$ の頂点集合と呼ぶ
- $A$ の要素を $G$ の弧と呼ぶ
- $A$ を $G$ の弧集合と呼ぶ
- 弧 $(u, v) \in A$ に対して，$u$ はその始点であり，$v$ はその終点である

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2)\}$
- 頂点 2 は弧 $(2, 3)$ の始点，頂点 3 は弧 $(2, 3)$ の終点



## 無向グラフ

### 無向グラフとは？

無向グラフとは，順序対 $(V, E)$ で，
- $V$ は集合
- $E \subseteq 2^V$ は $V$ の 要素数 2 の部分集合の集合

であるもののこと

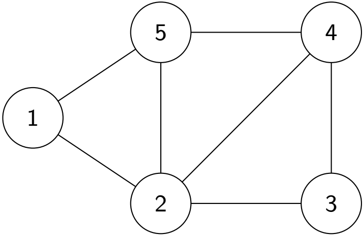
例：
- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$

### 注意

$\{2, 5\} = \{5, 2\}$ (集合では順序を不問)

# 無向グラフの図示

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$



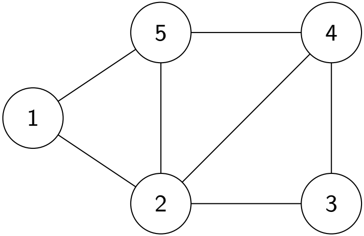
## 無向グラフの用語

無向グラフ $G = (V, E)$

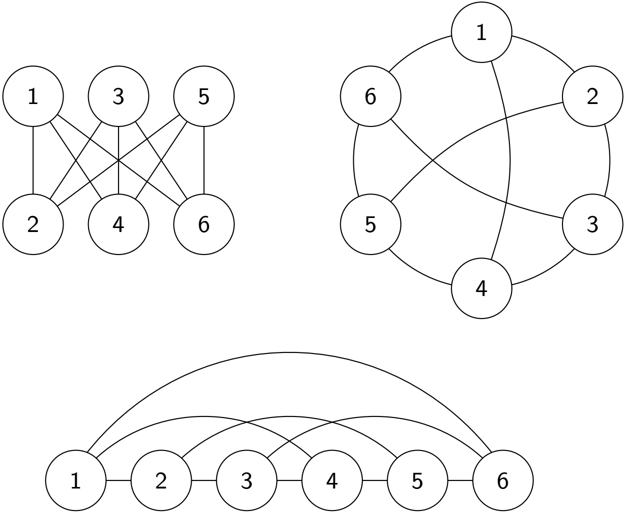
### 無向グラフの用語

- $V$ の要素を $G$ の頂点と呼ぶ
- $E$ の要素を $G$ の辺と呼ぶ
- $V$ を $G$ の頂点集合と呼ぶ
- $E$ を $G$ の辺集合と呼ぶ
- 辺 $\{u, v\} \in E$ に対して，$u, v$ をその端点と呼ぶ
- 頂点 $v$ が辺 $e$ の端点であるとき，$v$ は $e$ に接続するという
- 頂点 $u$ と $v$ が辺を成すとき，$u$ と $v$ は隣接するという

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$
- 頂点 $2, 3$ は辺 $\{2, 3\}$ の端点
- 頂点 $2$ は辺 $\{2, 3\}$ に接続する
- 頂点 $2$ と頂点 $3$ は隣接する



# 1 つのグラフに対するいろいろな図示



# 用語に関する注意

有向グラフ

- 「頂点」の別名：「節点」,「ノード」,「点」
- 「弧」の別名：「辺」,「有向辺」,「枝」,「アーク」,「エッジ」

無向グラフ

- 「頂点」の別名：「節点」,「ノード」,「点」
- 「辺」の別名：「無向辺」,「枝」,「エッジ」

## 目次

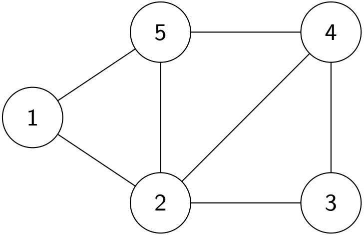
## 無向グラフにおける頂点の次数

無向グラフ $G = (V, E)$，頂点 $v \in V$

### 頂点 $v$ の次数とは？

頂点 $v \in V$ の**次数**とは，$v$ に接続する辺の数のこと

- $\deg_G(v)$ と表記する



- $\deg_G(1) = 2$
- $\deg_G(2) = 4$
- $\deg_G(3) = 2$
- $\deg_G(4) = 3$
- $\deg_G(5) = 3$

### 格言

数学理解の基本は「定義」と「記法」の理解

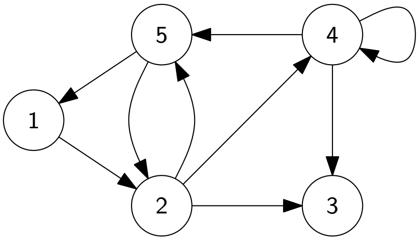
# 有向グラフにおける頂点の入次数

有向グラフ $G = (V, A)$，頂点 $v \in V$

**頂点 $v$ の入次数とは？**

頂点 $v \in V$ の**入次数**とは，$v$ を終点とする弧の数のこと

- $\deg^-_G(v)$ と表記する




- $\deg^-_G(1) = 1$
- $\deg^-_G(2) = 2$
- $\deg^-_G(3) = 2$
- $\deg^-_G(4) = 2$
- $\deg^-_G(5) = 2$

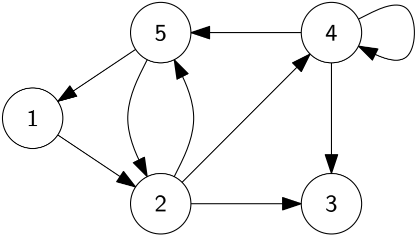
## 有向グラフにおける頂点の出次数

有向グラフ $G = (V, A)$，頂点 $v \in V$

**頂点 $v$ の出次数とは？**

頂点 $v \in V$ の**出次数**とは，$v$ を始点とする弧の数のこと

- $\deg^+_G(v)$



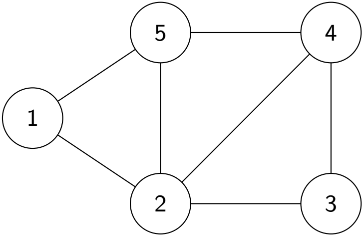

- $\deg^+_G(1) = 1$
- $\deg^+_G(2) = 3$
- $\deg^+_G(3) = 0$
- $\deg^+_G(4) = 3$
- $\deg^+_G(5) = 2$

# 握手補題

無向グラフ $G = (V, E)$

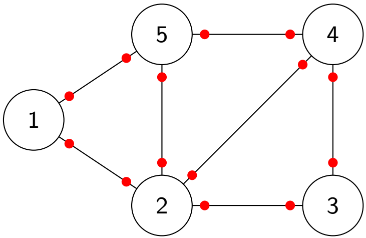
## 握手補題

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$$




- $\deg_G(1) = 2$
- $\deg_G(2) = 4$
- $\deg_G(3) = 2$
- $\deg_G(4) = 3$
- $\deg_G(5) = 3$
- $\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2+4+2+3+3 = 14$
- $|E| = 7$

## 握手補題の証明：準備 (直感)




- $G$ の各頂点の周りを見て，接続する辺の上に石を置く
- 石の総数を計算する

数え方 1

- 頂点 $v$ の周りの石の数 $= \deg_G(v)$
- $\therefore$ 石の総数 $= \displaystyle\sum_{v \in V} \deg_G(v)$

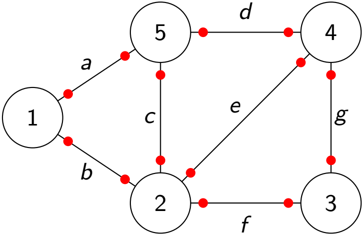
数え方 2

- 各辺 $e$ の上の石の数 $= 2$
- $\therefore$ 石の総数 $= \displaystyle\sum_{e \in E} 2 = 2|E|$

したがって

- $\displaystyle\sum_{v \in V} \deg_G(v) =$ 石の総数 $= 2|E|$

# 握手補題の証明：準備 (行列)

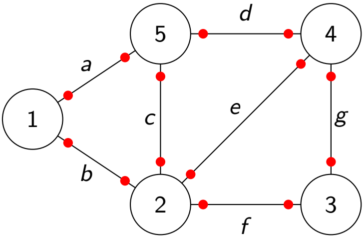



$E$

| $V$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ | $g$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | | | | | |
| 2 | | 1 | 1 | | 1 | 1 | |
| 3 | | | | | | 1 | 1 |
| 4 | | | | 1 | 1 | | 1 |
| 5 | 1 | | 1 | 1 | | | |

この行列を無向グラフの接続行列と呼ぶ

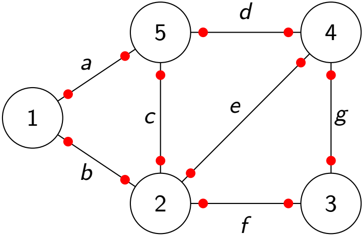
## 握手補題の証明：準備 (行列)




| $V \backslash E$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ | $g$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | | | | | | $= \deg_G(1)$ |
| 2 | | 1 | 1 | | 1 | 1 | | $= \deg_G(2)$ |
| 3 | | | | | | 1 | 1 | $= \deg_G(3)$ |
| 4 | | | | 1 | 1 | | 1 | $= \deg_G(4)$ |
| 5 | 1 | | 1 | 1 | | | | $= \deg_G(5)$ |

この行列を無向グラフの接続行列と呼ぶ

## 握手補題の証明：準備 (行列)




$$
\begin{array}{c|ccccccc|l}
V \backslash E & a & b & c & d & e & f & g & \\
\hline
1 & 1 & 1 & & & & & & = \deg_G(1) \\
2 & & 1 & 1 & & 1 & 1 & & = \deg_G(2) \\
3 & & & & & & 1 & 1 & = \deg_G(3) \\
4 & & & & 1 & 1 & & 1 & = \deg_G(4) \\
5 & 1 & & 1 & 1 & & & & = \deg_G(5) \\
\hline
 & \rotatebox{90}{=} & \rotatebox{90}{=} & \rotatebox{90}{=} & \rotatebox{90}{=} & \rotatebox{90}{=} & \rotatebox{90}{=} & \rotatebox{90}{=} & \\
 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 &
\end{array}
$$

この行列を無向グラフの接続行列と呼ぶ

## 握手補題の証明

$G = (V, E)$ は無向グラフであるとする.

- 次のように行列 $M \in \mathbb{R}^{V \times E}$ と定義する

$$\text{各 } v \in V, e \in E \text{ に対して,} \quad M_{v,e} = \begin{cases} 1 & (v \text{ は } e \text{ の端点である}) \\ 0 & (v \text{ は } e \text{ の端点ではない}) \end{cases}$$

- したがって, $\displaystyle\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$ □

## 握手補題の証明

$G = (V, E)$ は無向グラフであるとする.

- 次のように行列 $M \in \mathbb{R}^{V \times E}$ と定義する

$$\text{各 } v \in V, e \in E \text{ に対して,} \quad M_{v,e} = \begin{cases} 1 & (v \text{ は } e \text{ の端点である}) \\ 0 & (v \text{ は } e \text{ の端点ではない}) \end{cases}$$

- 任意の頂点 $v \in V$ に対して, $v$ を端点とする辺の数は $\deg_G(v)$ なので,

$$\sum_{v \in V} \sum_{e \in E} M_{v,e} = \sum_{v \in V} \left( \sum_{e \in E} M_{v,e} \right) = \sum_{v \in V} \deg_G(v)$$

- したがって, $\displaystyle\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$ □

## 握手補題の証明

$G = (V, E)$ は無向グラフであるとする．

- 次のように行列 $M \in \mathbb{R}^{V \times E}$ と定義する

$$\text{各 } v \in V, e \in E \text{ に対して，} \quad M_{v,e} = \begin{cases} 1 & (v \text{ は } e \text{ の端点である}) \\ 0 & (v \text{ は } e \text{ の端点ではない}) \end{cases}$$

- 任意の頂点 $v \in V$ に対して，$v$ を端点とする辺の数は $\deg_G(v)$ なので，

$$\sum_{v \in V} \sum_{e \in E} M_{v,e} = \sum_{v \in V} \left( \sum_{e \in E} M_{v,e} \right) = \sum_{v \in V} \deg_G(v)$$

- 任意の辺 $e \in E$ に対して，$e$ の端点の数は 2 なので，

$$\sum_{v \in V} \sum_{e \in E} M_{v,e} = \sum_{e \in E} \left( \sum_{v \in V} M_{v,e} \right) = \sum_{e \in E} 2 = 2|E|$$

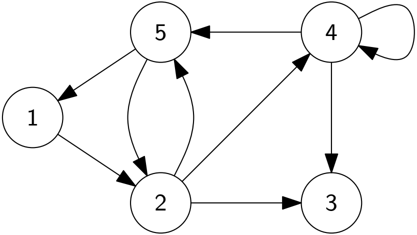
- したがって，$\displaystyle\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$ □

# 有向グラフに対する握手補題

有向グラフ $G = (V, A)$

## 有向グラフに対する握手補題

$$\sum_{v \in V} \deg^-_G(v) = |A|, \qquad \sum_{v \in V} \deg^+_G(v) = |A|$$




- $\deg^-_G(1) = 1$
- $\deg^-_G(2) = 2$
- $\deg^-_G(3) = 2$
- $\deg^-_G(4) = 2$
- $\deg^-_G(5) = 2$
- $\sum_{v \in V} \deg^-_G(v) = 1 + 2 + 2 + 2 + 2 = 9$
- $|A| = 9$

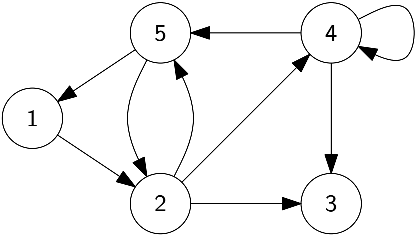
証明：演習問題

# 有向グラフに対する握手補題

有向グラフ $G = (V, A)$

## 有向グラフに対する握手補題

$$\sum_{v \in V} \deg_G^-(v) = |A|, \qquad \sum_{v \in V} \deg_G^+(v) = |A|$$




- $\deg_G^+(1) = 1$
- $\deg_G^+(2) = 3$
- $\deg_G^+(3) = 0$
- $\deg_G^+(4) = 3$
- $\deg_G^+(5) = 2$
- $\sum_{v \in V} \deg_G^+(v) = 1 + 3 + 0 + 3 + 2 = 9$
- $|A| = 9$

証明：演習問題

# 無向グラフの最大次数と最小次数

無向グラフ $G = (V, E)$

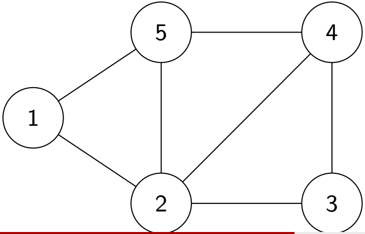
## 最大次数，最小次数とは？

$G$ の最大次数とは，$G$ の頂点の次数の最大値

$$\Delta(G) = \max\{\deg_G(v) \mid v \in V\}$$

$G$ の最小次数とは，$G$ の頂点の次数の最小値

$$\delta(G) = \min\{\deg_G(v) \mid v \in V\}$$




- $\deg_G(1) = 2$
- $\deg_G(2) = 4$
- $\deg_G(3) = 2$
- $\deg_G(4) = 3$
- $\deg_G(5) = 3$

- $\Delta(G) = 4$
- $\delta(G) = 2$

## 有向グラフの最大入次数と最小入次数

有向グラフ $G = (V, E)$

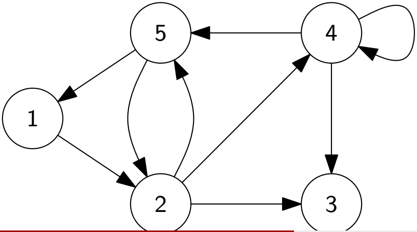
### 最大入次数，最小入次数とは？

$G$ の最大入次数とは，$G$ の頂点の入次数の最大値

$$\Delta^-(G) = \max\{\deg^-_G(v) \mid v \in V\}$$

$G$ の最小入次数とは，$G$ の頂点の入次数の最小値

$$\delta^-(G) = \min\{\deg^-_G(v) \mid v \in V\}$$




- $\deg^-_G(1) = 1$
- $\deg^-_G(2) = 2$
- $\deg^-_G(3) = 2$
- $\deg^-_G(4) = 2$
- $\deg^-_G(5) = 2$

- $\Delta^-(G) = 2$
- $\delta^-(G) = 1$

## 有向グラフの最大出次数と最小出次数

有向グラフ $G = (V, E)$

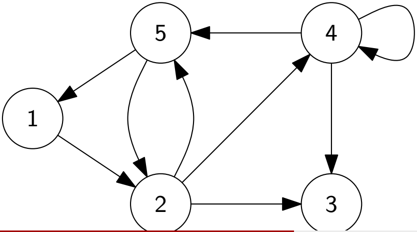
### 最大出次数，最小出次数とは？

$G$ の最大出次数とは，$G$ の頂点の出次数の最大値

$$\Delta^+(G) = \max\{\deg^+_G(v) \mid v \in V\}$$

$G$ の最小出次数とは，$G$ の頂点の出次数の最小値

$$\delta^+(G) = \min\{\deg^+_G(v) \mid v \in V\}$$




- $\deg^+_G(1) = 1$
- $\deg^+_G(2) = 3$
- $\deg^+_G(3) = 0$
- $\deg^+_G(4) = 3$
- $\deg^+_G(5) = 2$

- $\Delta^+(G) = 3$
- $\delta^+(G) = 0$

## 最小次数，平均次数，最大次数の関係

無向グラフ $G = (V, E)$

**最小次数，平均次数，最大次数の関係**

$$\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|} \leq \Delta(G)$$

証明：

- 握手補題より，$G$ の平均次数は $\dfrac{1}{|V|} \sum_{v \in V} \deg_G(v) = \dfrac{2|E|}{|V|}$.

## 最小次数，平均次数，最大次数の関係

無向グラフ $G = (V, E)$

### 最小次数，平均次数，最大次数の関係

$$\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|} \leq \Delta(G)$$

証明：

- 握手補題より，$G$ の平均次数は $\frac{1}{|V|}\sum_{v \in V} \deg_G(v) = \frac{2|E|}{|V|}$.
- 最小次数は平均次数以下なので，$\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|}$.

### 格言

最小値 $\leq$ 平均値 $\leq$ 最大値

## 最小次数，平均次数，最大次数の関係

無向グラフ $G = (V, E)$

**最小次数，平均次数，最大次数の関係**

$$\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|} \leq \Delta(G)$$

証明：

- 握手補題より，$G$ の平均次数は $\dfrac{1}{|V|} \sum_{v \in V} \deg_G(v) = \dfrac{2|E|}{|V|}$.
- 最小次数は平均次数以下なので，$\delta(G) \leq \dfrac{2|E|}{|V|}$.
- 最大次数は平均次数以上なので，$\Delta(G) \geq \dfrac{2|E|}{|V|}$. □

**格言**

最小値 $\leq$ 平均値 $\leq$ 最大値

## 最大次数の下界と最小次数の上界

無向グラフ $G = (V, E)$

### 帰結

1. ある頂点 $v \in V$ が存在して，$\deg_G(v) \geq \dfrac{2|E|}{|V|}$
2. ある頂点 $v \in V$ が存在して，$\deg_G(v) \leq \dfrac{2|E|}{|V|}$

証明：

## 最大次数の下界と最小次数の上界

無向グラフ $G = (V, E)$

**帰結**

1. ある頂点 $v \in V$ が存在して，$\deg_G(v) \geq \frac{2|E|}{|V|}$
2. ある頂点 $v \in V$ が存在して，$\deg_G(v) \leq \frac{2|E|}{|V|}$

<u>証明</u>：

1. $v$ として最大次数を持つ頂点を考えればよい． $\square$
2. $v$ として最小次数を持つ頂点を考えればよい． $\square$

## 目次

# 今日のまとめ

## 今日の目標

- グラフの定義を理解する
- 数え上げによる証明の手法を理解し，使えるようになる

## 残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員と TA は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

# 目次