グラフとネットワーク　第 7 回
最大流：モデル化 (1)

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2018 年 6 月 11 日

最終更新：2018 年 6 月 8 日　13:59

スケジュール 前半 (予定)

1. グラフの定義と次数：数理 (4/9)
2. 道と閉路：数理 (4/16)
3. 木：数理 (4/23)

* 休み (4/30)

4. マッチング：数理 (5/7)

* 休講 (5/14)

5. マッチング：モデル化 (5/21)
6. 最大流：数理 (5/28)

* 中間試験 (6/4)

スケジュール 後半 (予定)

7. 最大流：モデル化 (1) (6/11)
8. 最大流：モデル化 (2) (6/18)
9. 彩色：数理 (6/25)
10. 彩色：モデル化 (7/2)

* 休講 (7/9)
* 休み (7/16)

11. 平面グラフ：数理 (7/23)
12. 平面グラフ：モデル化 (7/30)

* 期末試験 (8/6？)

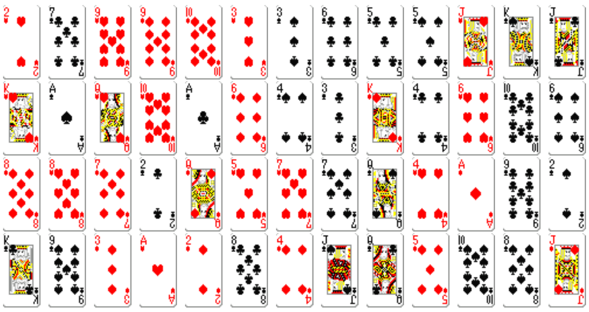
注意：予定の変更もありうる

概要

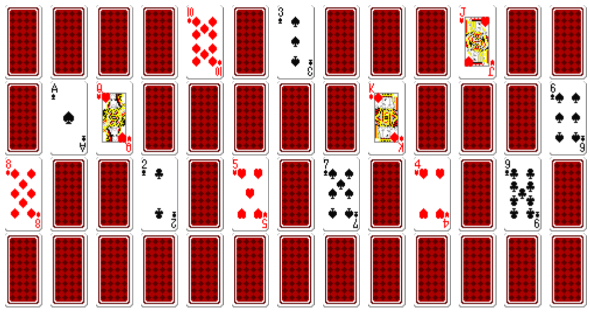
今日の目標

- 最大流最小カット定理を用いて，二部グラフにおける，最大マッチングと最小頂点被覆の強双対性を証明できる
- 二部グラフにおいて，片側を飽和するマッチングが存在するための必要十分条件 (Hall の結婚定理) を証明できる
- Hall の結婚定理を用いて，様々な問題を解決できる

トランプ・マジック？



トランプ・マジック？ (続)

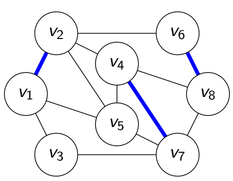


グラフにおけるマッチング

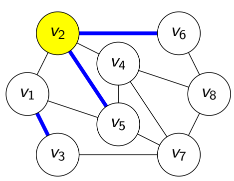
無向グラフ $G = (V, E)$

マッチングとは？

G のマッチングとは辺部分集合 $M \subseteq E$ で，M のどの 2 辺も同じ頂点に接続しないもの



$\{\{v_1, v_2\}, \{v_4, v_7\}, \{v_6, v_8\}\}$ は マッチングである



$\{\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_6\}\}$ は マッチングではない

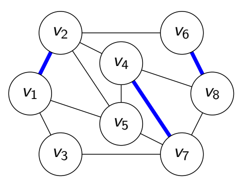
マッチングの辺 $e \in M$ は e の端点を飽和する

最大マッチング

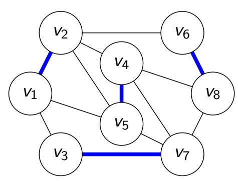
無向グラフ $G = (V, E)$

最大マッチングとは？

G の最大マッチングとは G のマッチング $M \subseteq E$ で，G の任意のマッチング M' に対して $|M| \geq |M'|$ を満たすもの



最大マッチングではない

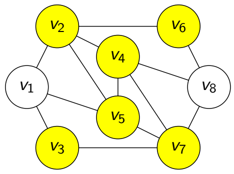


最大マッチングである

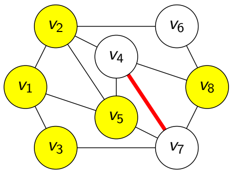
無向グラフ $G = (V, E)$

頂点被覆とは？

G の頂点被覆とは頂点部分集合 $C \subseteq V$ で，
G のどの辺もある C の頂点に接続しているもの



$\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ は
頂点被覆である



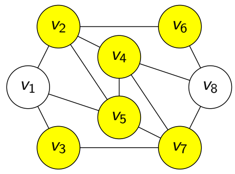
$\{v_1, v_2, v_3, v_5, v_8\}$ は
頂点被覆ではない

頂点被覆の頂点は，それに接続する辺を覆う（被覆する）

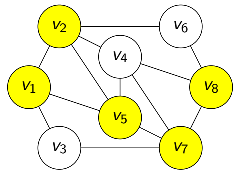
無向グラフ $G = (V, E)$

最小頂点被覆とは？

G の最小頂点被覆とは頂点被覆 $C \subseteq V$ で，
G の任意の頂点被覆 C' に対して $|C| \leq |C'|$ を満たすもの



$\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ は
最小頂点被覆ではない



$\{v_1, v_2, v_5, v_7, v_8\}$ は
最小頂点被覆である

マッチングと頂点被覆

弱双対性（成立）

最大マッチング の辺数 $\leq$ 最小頂点被覆 の頂点数

強双対性（不成立の場合も）

最大マッチング の辺数 $\stackrel{?}{=}$ 最小頂点被覆 の頂点数

流れとカット

弱双対性（成立）

最大流 の値 $\leq$ 最小 s, t カット の容量

強双対性（成立）

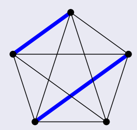
最大流 の値 $=$ 最小 s, t カット の容量

加えて，整数流定理

注意

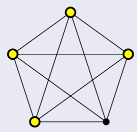
要素数が同じであるマッチングと頂点被覆が必ず存在するわけではない

下界



最大マッチングの辺数 ≥ 2

上界



最大マッチングの辺数 ≤ 4

しかし，存在する場合には，マッチングの最大性を保証できる

マッチングと頂点被覆

弱双対性（成立）

最大マッチング の辺数 $\leq$ 最小頂点被覆 の頂点数

強双対性（二部グラフでは成立）

最大マッチング の辺数 $=$ 最小頂点被覆 の頂点数

Kőnig–Egerváry の定理

流れとカット

弱双対性（成立）

最大流 の値 $\leq$ 最小 s, t カット の容量

強双対性（成立）

最大流 の値 $=$ 最小 s, t カット の容量

加えて，整数流定理

Dénes Kőnig
ケーニグ
(1894–1944)

Jenő Egerváry
エゲルヴァーリ
(1891–1958)

http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-marriage

http://www.cs.elte.hu/egres/www/intro.html

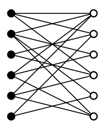
無向グラフ $G = (V, E)$

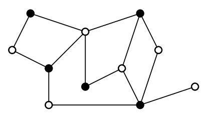
二部グラフとは？

G が二部グラフであるとは，
- 頂点集合 V を 2 つの集合 A, B に分割できて
- どの辺 $e \in E$ も一端点を A に持ち，もう一端点を B に持つもの

A と B を G の部集合と呼ぶ

二部グラフの例





二部グラフの最大マッチング：Kőnig–Egerváry の定理

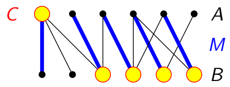
二部グラフ $G = (V, E)$

Kőnig–Egerváry の定理 (1931)

G の最大マッチング M，G の最小頂点被覆 C に対して

$$|M| = |C|$$

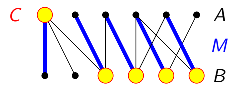
例：$|M| = |C| = 5$

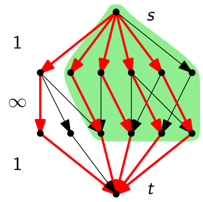


Kőnig–Egerváry の定理：証明の方針

任意の二部グラフ $G = (V, E)$ を考える

1. 有向グラフ $G' = (V', A')$ を作り，弧に容量を与える ($V' = V \cup \{s, t\}$)
2. 次の対応を見る (整数流定理を用いる)
   G の最大マッチング ↔ G' の最大流
   G の最小頂点被覆 ↔ G' の最小 s, t カット
3. 最大流最小カット定理 (強双対性) より，
   最大マッチングの辺数 ＝ 最小頂点被覆の頂点数



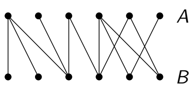


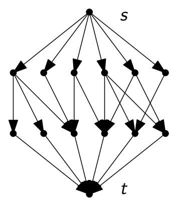
Kőnig–Egerváry の定理：証明 (有向グラフの構成)

証明：任意の二部グラフ $G = (V, E)$ を考え，その部集合を A, B とする

- 次のように有向グラフ $G' = (V', A')$ を作る

$$\begin{aligned} V' &= V \cup \{s, t\}, \\ A' &= \{(u, v) \mid \{u, v\} \in E, u \in A, v \in B\} \cup \\ &\quad \{(s, u) \mid u \in A\} \cup \{(v, t) \mid v \in B\} \end{aligned}$$



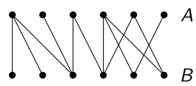


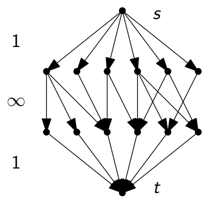
Kőnig–Egerváry の定理：証明 (容量の決定)

- G' の各弧 (x, y) に対して容量を次のように定める

$$c((x, y)) = \begin{cases} 1 & (x = s \text{ または } y = t \text{ のとき}) \\ \infty & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

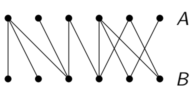
- 注：「∞」は「十分大きな整数」であると見なす

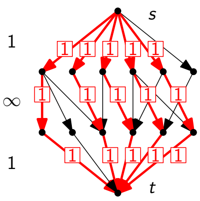




Kőnig–Egerváry の定理：証明 (定理の適用)

- 最大流最小カット定理より，G' において
  s から t へ至る最大流の値 ＝ 最小 s, t カットの容量
- 整数流定理より，各弧における流量が整数である最大流が存在
- そのような整数最大流を $f\colon A' \to \mathbb{Z}$ とする



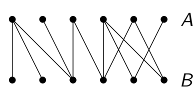


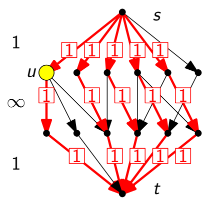
Kőnig–Egerváry の定理：証明 (マッチングの構成 (1))

- 容量制約より，任意の $(s, u) \in A'$ に対して

$$0 \le f((s, u)) \le 1$$

- f の整数性より，$f((s, u))$ は 0 か 1



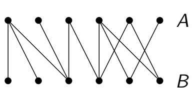


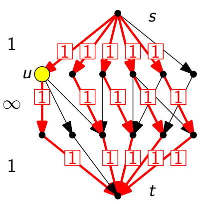
Kőnig–Egerváry の定理：証明 (マッチングの構成 (2))

- 流量保存制約より，任意の $u \in A$ に対して，

$$f((s, u)) = \sum_{v \in B : (u,v) \in A'} f((u, v))$$

- 左辺 $f((s, u))$ は 0 か 1 なので，この右辺も 0 か 1
- 特に，$f((s, u))$ が 1 であるとき，
  $f((u, v)) = 1$ と $(u, v) \in A'$ を満たす $v \in B$ が
  ただ 1 つ存在する .... (性質 1)



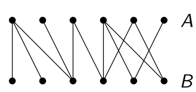


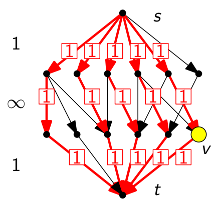
Kőnig–Egerváry の定理：証明 (マッチングの構成 (3))

- 容量制約より，任意の $(v, t) \in A'$ に対して

$$0 \le f((v, t)) \le 1$$

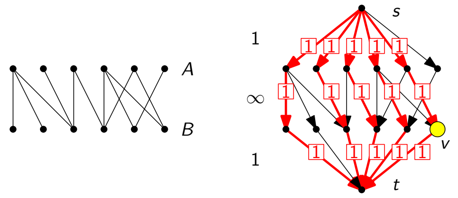
- f の整数性より，$f((v, t))$ は 0 か 1





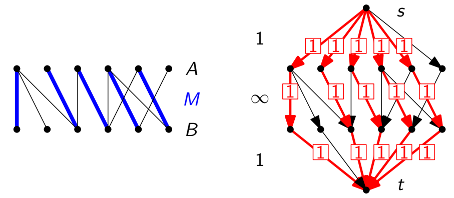
Kőnig–Egerváry の定理：証明 (マッチングの構成 (4))

- 流量保存制約より，任意の $v \in B$ に対して，
$$f((v,t)) = \sum_{u \in A:(u,v) \in A'} f((u,v))$$
- 左辺 $f((v,t))$ は 0 か 1 なので，この右辺も 0 か 1
- 特に，$f((v,t))$ が 1 であるとき，
$f((u,v)) = 1$ と $(u,v) \in A'$ を満たす $u \in A$ が
ただ 1 つ存在する .... (性質 2)



Kőnig–Egerváry の定理：証明 (マッチングの構成 (5))

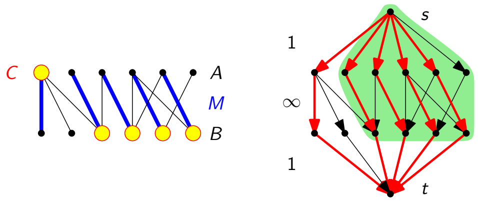
- ここで，
$$M = \{\{u,v\} \in E \mid f((u,v)) = 1\}$$
とすると，性質 1 と性質 2 から M は G のマッチング
- また，$\mathtt{val}(f) = |M|$ である



Kőnig–Egerváry の定理：証明の方針 (再掲)

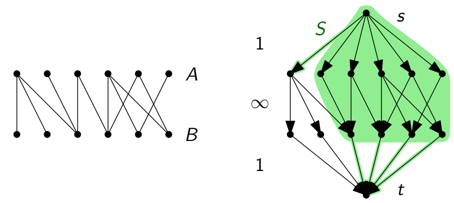
任意の二部グラフ $G = (V, E)$ を考える

1. 有向グラフ $G' = (V', A')$ を作り，弧に容量を与える
$(V' = V \cup \{s,t\})$
2. 次の対応を見る (整数流定理を用いる)
G の最大マッチング $\leftrightarrow$ G' の最大流
G の最小頂点被覆 $\leftrightarrow$ G' の最小 s,t カット
3. 最大流最小カット定理 (強双対性) より，
最大マッチングの辺数 ＝ 最小頂点被覆の頂点数



Kőnig–Egerváry の定理：証明 (頂点被覆の構成 (1))

- 最小 s,t カット S を考える
- このとき，s,t カットの定義より，$s \in S$ かつ $t \notin S$
- 集合 $\{s\}$ は s,t カットであり，その容量は $\mathrm{cap}(\{s\}) = |A|$ なので，
$$\mathrm{cap}(S) \leq \mathrm{cap}(\{s\}) = |A|$$



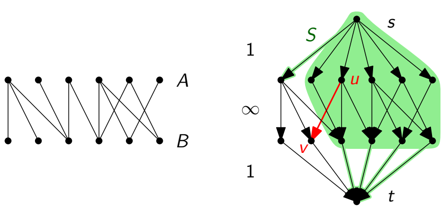
Kőnig–Egerváry の定理：証明 (頂点被覆の構成 (2))

観察 3

$u \in S$, $v \notin S$, $(u,v) \in A'$ となる $u \in A$ と $v \in B$ は存在しない

なぜか？

- 存在するとすると，$\mathrm{cap}(S) \geq c((u,v)) = \infty$
- これは，$\mathrm{cap}(S) \leq |A| < \infty$ に矛盾

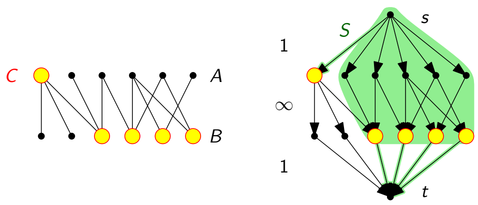


Kőnig–Egerváry の定理：証明 (頂点被覆の構成 (3))

- ここで，$C = (A - S) \cup (B \cap S)$ とする

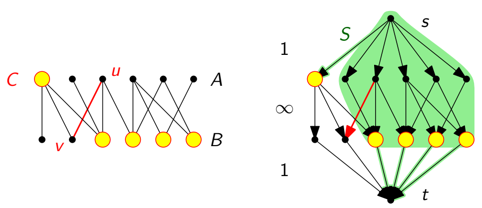
今から確かめること

1. この C が G の最小頂点被覆となること
2. $|C| = \mathrm{cap}(S)$



Kőnig–Egerváry の定理：証明 (頂点被覆の構成 (4))

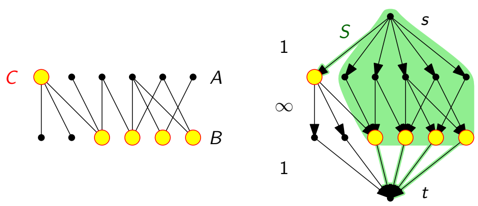
- C が G の頂点被覆でないと仮定する
- つまり，
ある $\{u,v\} \in E$ $(u \in A, v \in B)$ が存在して，$u \notin C$ かつ $v \notin C$
- $u \in A$ かつ $u \notin A - S$ なので，$u \in S$
- $v \in B$ かつ $v \notin B \cap S$ なので，$v \notin S$
- これは観察 3 に矛盾し，つまり，C は G の頂点被覆である．



Kőnig–Egerváry の定理：証明 (頂点被覆の構成 (5))

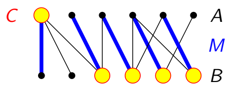
観察 3 から

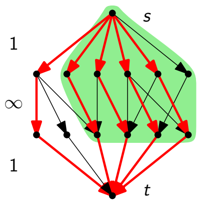
$$\begin{aligned}
\mathrm{cap}(S) &= \sum_{u \in A: u \notin S} c((s,u)) + \sum_{v \in B: v \in S} c((v,t)) \\
&= \sum_{u \in A - S} 1 + \sum_{v \in B \cap S} 1 \\
&= |A - S| + |B \cap S| = |(A - S) \cup (B \cap S)| = |C|
\end{aligned}$$



Kőnig–Egerváry の定理：証明 (まとめ (1))

- 流れ f から，最大マッチングの辺数 $\geq |M| = \mathtt{val}(f)$
- カット S から，最小頂点被覆の頂点数 $\leq |C| = \mathtt{cap}(S)$
- 最大流最小カット定理より，$\mathtt{val}(f) = \mathtt{cap}(S)$



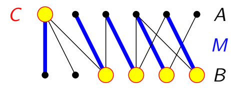


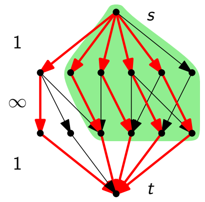
Kőnig–Egerváry の定理：証明 (まとめ (2))

- したがって，マッチングと頂点被覆の弱双対性より

$$\begin{aligned} \mathtt{val}(f) &\leq \text{最大マッチングの辺数} \\ &\leq \text{最小頂点被覆の頂点数} \\ &\leq \mathtt{cap}(S) = \mathtt{val}(f) \end{aligned}$$

- すなわち，最大マッチングの辺数 $=$ 最小頂点被覆の頂点数 □





二部グラフの最大マッチング：Kőnig–Egerváry の定理：補足

二部グラフ $G = (V, E)$

Kőnig–Egerváry の定理 (1931)

G の最大マッチング M，G の最小頂点被覆 C に対して

$$|M| = |C|$$

「流れ」という比喩

流れ	——	割当
たくさん流す	——	たくさん割り当てる

補足

実験第一で扱った「二部グラフの最大マッチング」における増加道法は
第 6 回講義で紹介した最大流問題に対する増加道法を
二部グラフの最大マッチング問題に適用したもの

目次

P. Hall

Philip Hall
ホール
(1904–1982)

http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-marriage

近傍

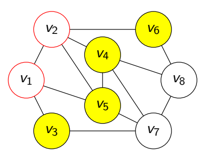
近傍とは？

無向グラフ $G = (V, E)$ における頂点 $v \in V$ の近傍とは
v の隣接頂点全体の集合

$$N(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}$$

G における頂点集合 $S \subseteq V$ の近傍とは

$$N(S) = \left(\bigcup_{v \in S} N(v)\right) - S$$



- $N(v_1) = \{v_2, v_3, v_5\}$
- $N(\{v_1, v_2\}) = \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$

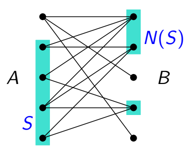
二部グラフの片側を飽和するマッチングの存在性

二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

Hall の結婚定理

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持つ $\Leftrightarrow$
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N(S)|$

例：



「$\Leftarrow$」の証明に，Kőnig–Egerváry の定理を用いる

Hall の結婚定理：証明 (1)

二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

Hall の結婚定理

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持つ $\Leftrightarrow$
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N(S)|$

$\Rightarrow$ の証明：演習問題

Hall の結婚定理：証明 (2)

二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

Hall の結婚定理

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持つ $\Leftrightarrow$
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N(S)|$

$\Leftarrow$ の証明：対偶を証明する

証明すること

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持たない $\Rightarrow$
ある頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| > |N(S)|$

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持たないとき，

$$G \text{ の最大マッチングの辺数} < |A|$$

Hall の結婚定理：証明 (3)

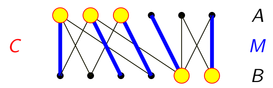
二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

証明すること

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持たない $\Rightarrow$
ある頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| > |N(S)|$

証明：A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持たないとする

- このとき，G の最大マッチングの辺数 $< |A|$
- Kőnig–Egerváry の定理より，G の最小頂点被覆の頂点数 $< |A|$
- C を G の最小頂点被覆とする ($|C| < |A|$)
- $A \cap C$ と $B \cap C$ を考える



Hall の結婚定理：証明 (4)

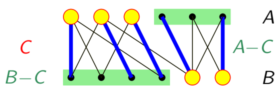
二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

証明すること

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持たない $\Rightarrow$
ある頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| > |N(S)|$

証明 (続き)：

- $|A \cap C| + |B \cap C| = |C| < |A|$
- よって，$|B \cap C| < |A| - |A \cap C| = |A - C|$
- C は頂点被覆なので，$A - C$ と $B - C$ の間に辺はない
- したがって，$N(A - C) \subseteq B \cap C$



Hall の結婚定理：証明 (5)

二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

証明すること

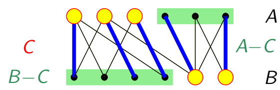
A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持たない $\Rightarrow$
ある頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| > |N(S)|$

証明 (続き)：

- 以上をまとめると，

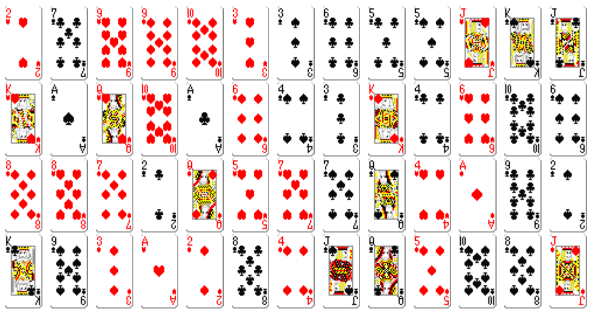
$$|N(A - C)| \leq |B \cap C| < |A - C|$$

- つまり，$S = A - C$ とすると，$|N(S)| < |S|$ □

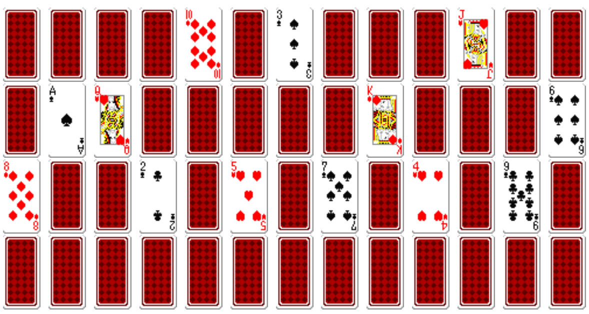


目次

トランプ・マジック？



トランプ・マジック？ (続)



トランプ・マジック (？) のからくり

命題

トランプのカード 52 枚を 4 枚ずつ 13 個の組へ任意に分けたとき，
各組から 1 枚ずつカードをうまく選ぶと，
A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K を 1 つずつ取り出せる

Hall の結婚定理を使って，この命題を証明する

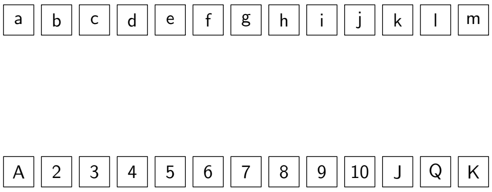
考えなくてはならないこと

どのようにマッチングを使うのか？

$\rightsquigarrow$ グラフを使って，問題をモデル化する

トランプ・マジック (？) のからくり：二部グラフの構成 (1)

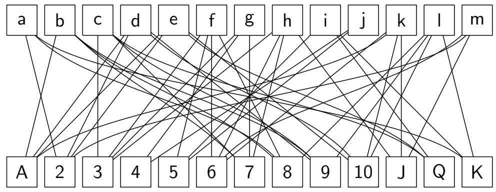
13 個のグループを表す頂点 (a から m まで)



13 個のカードのランクを表す頂点 (A から K まで)

トランプ・マジック (？) のからくり：二部グラフの構成 (2)

各グループとカードのランクの組に対して，

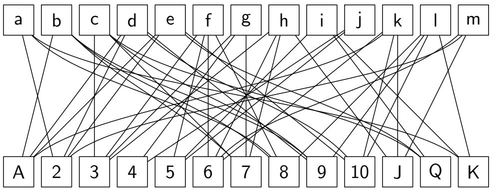


そのグループがそのランクのカードを含んでいれば辺を引く
そうでないときは辺を引かない

- $A =$ グループに対応する頂点の集合
- $B =$ カードのランクに対応する頂点の集合

トランプ・マジック (？) のからくり：Hall の結婚定理

Hall の結婚定理を使いたい

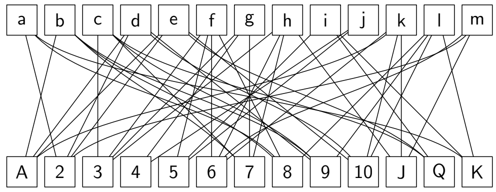


Hall の結婚定理

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持つ $\Leftrightarrow$
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N(S)|$

トランプ・マジック (？) のからくり：条件の確認

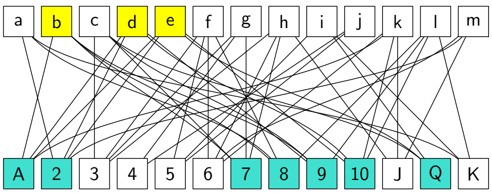
任意の $S \subseteq A$ を考える



- S はグループの集合に対応
- $N(S)$ は S に属するグループに含まれるカードのランクに対応

トランプ・マジック (？) のからくり：条件の確認 (続き)

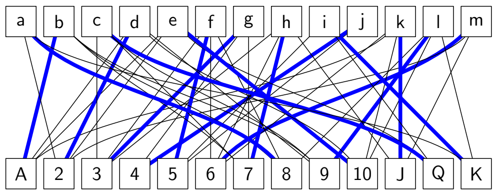
任意の $S \subseteq A$ を考える



- S に属するグループに含まれるカードの数は $4|S|$
- $N(S)$ に対応するランクのカードの数は $4|N(S)|$
- 背理法：$|S| > |N(S)|$ だと仮定すると，
  $|S|$ 個のグループを $N(S)$ に対応するランクのカードだけで作れない
- よって，$|S| \leq |N(S)|$ でないといけない

トランプ・マジック (？) のからくり：条件の確認 (続き)

つまり，Hall の結婚定理にある条件が必ず成り立つ．



- つまり，A を飽和するマッチングが存在
- そこから，各グループでどのカードを選べばよいかが分かる $\square$

目次

今日のまとめ

今日の目標

- 最大流最小カット定理を用いて，
  二部グラフにおける，最大マッチングと最小頂点被覆の強双対性を
  証明できる
- 二部グラフにおいて，片側を飽和するマッチングが存在するための
  必要十分条件 (Hall の結婚定理) を証明できる
- Hall の結婚定理を用いて，様々な問題を解決できる