グラフとネットワーク (11) **2018 年 7 月 23 日**

演習問題 岡本 吉央

提出締切： 2018 年 7 月 30 日 講義終了時

復習問題 11.1 任意の木が平面的グラフであることを証明せよ．

復習問題 11.2 平面グラフ G の頂点数，辺数，面数，連結成分数がそれぞれ n, m, f, k であるとき，

$$n - m + f = 1 + k$$

が成り立つことを証明せよ．

復習問題 11.3 次の問いに答えよ．

1. 頂点数が 3 以上である任意の連結平面的グラフ $G = (V, E)$ に対して，$|E| \leq 3 \cdot |V| - 6$ が成り立つことを証明せよ．
2. それを用いて，頂点数 5 の完全グラフ K_5 が平面的ではないことを証明せよ．

復習問題 11.4 正四面体，正六面体，正八面体，正十二面体，正二十面体以外に，3 次元正多面体が存在しないことを証明せよ．(ヒント：3 次元凸多面体のグラフが平面的であるという事実を用いてもよい．)

補足問題 11.5 次の問いに答えよ．

1. 頂点数が 2 以上である任意の連結外平面的グラフ $G = (V, E)$ に対して，$|E| \leq 2 \cdot |V| - 3$ が成り立つことを証明せよ．
2. それを用いて，頂点数 4 の完全グラフ K_4 が外平面的ではないことを証明せよ．

追加問題 11.6 3 以上のある整数 n に対して，頂点数が n であり，辺数が $3n - 6$ 以下であるが，平面的ではないグラフを構成せよ．そのグラフがなぜ平面的でないのかも説明せよ．

追加問題 11.7 次の問いに答えよ．

1. 頂点数が 3 以上である任意の連結平面的グラフ $G = (V, E)$ に対して，G が長さ 3 の閉路を含まないならば，$|E| \leq 2 \cdot |V| - 4$ が成り立つことを証明せよ．
2. それを用いて，完全二部グラフ $K_{3,3}$ が平面的ではないことを証明せよ．

追加問題 11.8 各面が正五角形か正六角形であるような 3 次元凸多面体において，正五角形である面の数が必ず 12 になることを証明せよ．(ヒント：3 次元凸多面体のグラフが平面的であるという事実を用いてもよい．まず，各頂点の次数が 3 であることを証明せよ．)

追加問題 11.9 次の 3 条件をどれも満たす 3 次元凸多面体をすべて挙げよ．なぜそうなるのか，理由も述べよ．

- 面として，正三角形と正方形を少なくとも 1 つずつ含む．
- 面として，正三角形と正方形以外を含まない．
- どの頂点においても，集まる面の数はちょうど 3 である．

(ヒント：3 次元凸多面体のグラフが平面的であるという事実を用いてもよい．)

追加問題 11.10 次の問いに答えよ．

1. 頂点数が 2 以上である任意の連結外平面的グラフ $G = (V, E)$ に対して，G が長さ 3 の閉路を含まないならば，$|E| \leq \frac{3}{2} \cdot |V| - 2$ が成り立つことを証明せよ．
2. それを用いて，完全二部グラフ $K_{2,3}$ が外平面的ではないことを証明せよ．