

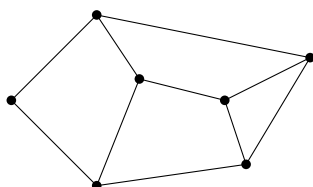
提出締切：2018年7月2日 講義終了時

**復習問題 9.1** 無向グラフ  $G$  が2彩色可能であるための必要十分条件は、 $G$  が二部グラフであることである。これを証明せよ。

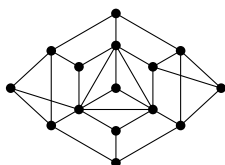
**復習問題 9.2** 任意の無向グラフ  $G$  に対して、その染色数  $\chi(G)$  と最大次数  $\Delta(G)$  が  $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$  という関係を満たすことを証明せよ。

**復習問題 9.3** 任意の無向グラフ  $G$  に対して、その染色数  $\chi(G)$  と任意のクリーク  $C \subseteq V$  が  $\chi(G) \geq |C|$  という関係を満たすことを証明せよ。

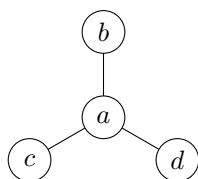
**復習問題 9.4** 次の無向グラフにおける色数最小の彩色を与えよ。その彩色の色数が最小であることも証明せよ。



**復習問題 9.5** 次の無向グラフにおける色数最小の彩色を与えよ。その彩色の色数が最小であることも証明せよ。



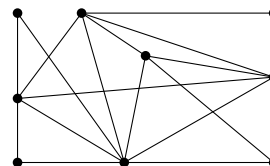
**補足問題 9.6** 次の図にある無向グラフ  $G$  がどの無向グラフの線グラフではない(つまり、 $G = L(H)$  となる無向グラフ  $H$  が存在しない) ということを証明せよ。



**補足問題 9.7** 任意の無向グラフ  $G = (V, E)$  に対して、頂点集合  $V$  上のある全順序が存在して、その全順序に従って貪欲彩色を行うと、色数最小の彩色が得られることを証明せよ。(ヒント：直感を得るために、まず  $G$  が二部グラフの場合を考えるとよいかもしれない。)

**追加問題 9.8** 任意の無向グラフ  $G = (V, E)$  と  $G$  の任意の独立集合  $I \subseteq V$  を考える。このとき、 $I$  の補集合  $V - I$  は  $G$  の頂点被覆であることを証明せよ。

**追加問題 9.9** 次の無向グラフにおいて、色数最小の彩色を与えよ。その彩色の色数が最小であることも証明せよ。



**追加問題 9.10** 無向グラフ  $G = (V, E)$  に対して、その独立集合の頂点数の最大値を  $\alpha(G)$  で表す。このとき、 $\alpha(G)\chi(G) \geq |V|$  が成り立つことを証明せよ。

**追加問題 9.11** 任意の自然数  $k \geq 2$  に対して、次の性質を持つ二部グラフ  $G = (V, E)$  を構成せよ。性質： $G$  の最大次数は  $k$  であり、 $V$  上のある全順序  $\sigma$  が存在して、それに従う貪欲彩色によって  $G$  の彩色として色数  $k + 1$  のものが得られる。(注意： $k$  は2以上の任意の自然数であることに注意する。すなわち、 $k$  によって  $G$  は変わる。)