

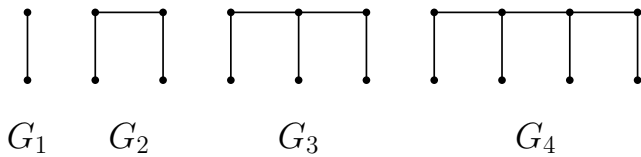
13:00-14:30. A4用紙(両面自筆書き込み)のみ持ち込み可. 使用可能な解答用紙は1枚のみ.
携帯電話, タブレット等は電源を切ってカバンの中にする.

採点終了次第, 講義 web ページにて, 得点分布, 講評などを掲載する.

採点結果を知りたい場合は, 解答用紙右上「評点」欄の中に5文字程度の適当なランダム文字列を記載のこと(その文字列は控えておくように).

採点終了後, そのランダム文字列と得点の対応表を公開する.

問題 1 自然数 $n \geq 1$ に対して, 次の図で表されるグラフ G_n を考える.



グラフ G_n における独立集合の総数を g_n とする.

(1) 次の漸化式が成り立つことを証明せよ.

$$g_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 8 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ 2g_{n-1} + 2g_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

(2) $g_n = O((1 + \sqrt{3})^n)$ が成り立つことを証明せよ.

問題 3 集合 $G = \{a, b, c, d\}$ と G 上の演算 \circ が群を成し, 次の群表を持つとする. しかし, その一部が「?」となり, 不明である. これが群であるという条件から, 「?」となっている部分を復元せよ. また, この群の単位元と, 各要素の逆元が何であるか, 答えよ.

| \circ | a | b | c | d |
|---------|-----|-----|-----|-----|
| a | ? ? | b | ? | |
| b | ? | ? | ? | ? |
| c | ? | c | ? | a |
| d | c | ? | ? | ? |

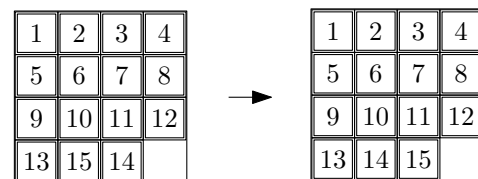
注意: G は集合であるので, 同じ要素があってはならない. 例えば, $a = b$ となってはならないことに注意せよ.

問題 2 次の漸化式を考える.

$$c_n = \begin{cases} 3 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 2c_{n-1} - n & (n \geq 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって, 数列 $\{c_n\}_{n \geq 0}$ の一般項 c_n を閉じた形で与えよ. (注: 母関数を用いる方法によらない解答であっても, 部分点を与える.)

問題 4 15 パズルとは, 4×4 の盤面に, 1 から 15 の書かれた正方形のコマが 1 つずつ置かれ, 1 か所の空きを利用してコマを動かし, 目的の配置を作成するパズルである. サム・ロイド (Sam Lloyd) は下の図にある左の配置から右の配置が作成できるか, 尋ねた.



サム・ロイドの問題に対する正しい解答は「作成できない」である. なぜ作成できないのか, 証明せよ.