

離散数理工学 第 12 回  
離散確率論：マルコフ連鎖 (発展)

岡本 吉央  
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2019 年 1 月 31 日

最終更新：2019 年 1 月 30 日 11:13

- |   |                      |         |
|---|----------------------|---------|
| 1 | 数え上げの基礎：二項係数と二項定理    | (10/4)  |
| ★ | 休講                   | (10/11) |
| 2 | 数え上げの基礎：漸化式の立て方      | (10/18) |
| 3 | 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎) | (10/25) |
| ★ | 休講                   | (11/1)  |
| 4 | 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展) | (11/8)  |
| 5 | 離散代数：対称群と置換群         | (11/15) |
| ★ | 休講                   | (11/22) |
| 6 | 離散代数：有限群             | (11/29) |
| 7 | 離散代数：有限群の応用          | (12/6)  |

- |    |                           |                  |
|----|---------------------------|------------------|
| 8  | 離散確率論：確率的離散システムの解析        | (12/13)          |
| ★  | 中間試験                      | (12/20)          |
| 9  | 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎) | (1/10)           |
| 10 | 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展) | (1/17)           |
| 11 | 離散確率論：マルコフ連鎖 (基礎)         | (1/24)           |
| 12 | 離散確率論：マルコフ連鎖 (発展)         | (1/31)           |
| 13 | <del>離散確率論：エントロピー</del>   | <del>(2/7)</del> |
| ★  | 期末試験                      | (2/14)           |

- ▶ 日時, 場所
  - ▶ 2月14日(木): 3限 @西9-115
- ▶ 出題範囲
  - ▶ 第8回から第12回(今回)まで
- ▶ 出題形式
  - ▶ 演習問題と同じ形式の問題を4題出題する
  - ▶ その中の2題は演習問題として提示されたものと同じである(複数の演習問題が組み合わせられて1題とされる可能性もある)(「発展」として提示された演習問題は出題されない)
  - ▶ 全問に解答する
- ▶ 配点: 1題15点満点, 計60点満点
- ▶ 時間: 90分
- ▶ 持ち込み: A4用紙1枚分(裏表自筆書き込み)のみ可

### 今日の目標

マルコフ連鎖について以下ができるようになる

- ▶ 「ギャンブラーの破産」において、破産確率を計算できる
- ▶ 「有限グラフ上の単純ランダムウォーク」において、到達時刻 (の期待値) を計算できる

この講義で扱うマルコフ連鎖は

「斉次 離散時間 有限状態 マルコフ連鎖」と呼ばれるもの

### 次の状況を考える

- ▶ ある街の天気は「晴れ (F)」, 「曇り (C)」, 「雨 (R)」 のいずれか
- ▶ 天気は毎日, 確率的に変わる
  - ▶ 晴れの日の翌日の天気が晴れである確率 =  $1/2$
  - ▶ 晴れの日の翌日の天気が曇りである確率 =  $1/3$
  - ▶ 晴れの日の翌日の天気が雨である確率 =  $1/6$
  - ▶ 曇りの日の翌日の天気が晴れである確率 =  $1/3$
  - ▶ 曇りの日の翌日の天気が曇りである確率 =  $1/3$
  - ▶ 曇りの日の翌日の天気が雨である確率 =  $1/3$
  - ▶ 雨の日の翌日の天気が晴れである確率 =  $1/4$
  - ▶ 雨の日の翌日の天気が曇りである確率 =  $1/2$
  - ▶ 雨の日の翌日の天気が雨である確率 =  $1/4$

### ポイント

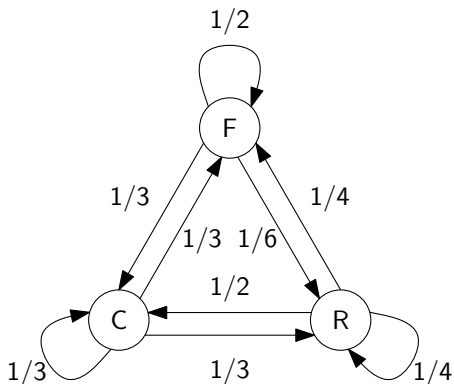
次の日の天気 (に関する確率) は, 前の日の天気だけから決まる

見にくいので，行列で表現する

$$P = \begin{array}{c} \phantom{P} \\ \phantom{P} \\ \phantom{P} \end{array} \begin{array}{ccc} & \text{F} & \text{C} & \text{R} \\ \text{F} & \left( \begin{array}{ccc} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{array} \right) \\ \text{C} \\ \text{R} \end{array}$$

「行」から「列」へ推移する

見にくいので、状態遷移図で表現する



「始点」から「終点」へ推移する



## 目次

- ① ギャンブラーの破産
- ② 有限グラフ上の単純ランダムウォーク
- ③ 今日のまとめ

## ギャンブラーの破産：設定

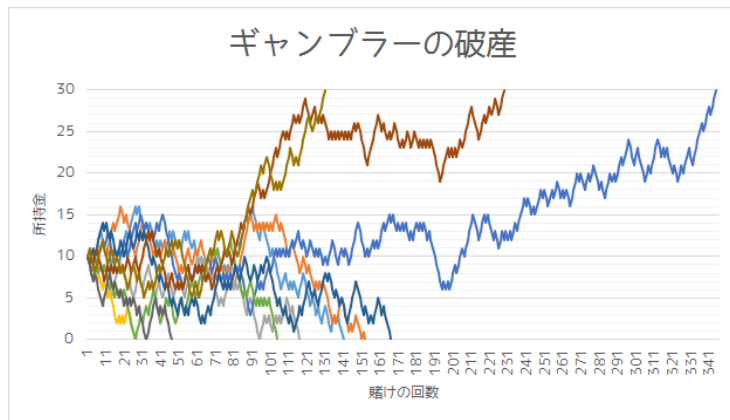
## 設定

- ▶ 1人のギャンブラー，所持金  $n$  万円
- ▶ 賭けを行うごとに，
  - ▶  $1/2$  の確率で，所持金が 1 万円増加
  - ▶  $1/2$  の確率で，所持金が 1 万円減少
- ▶ 所持金が  $3n$  万円か 0 万円になったら，終了

## 問題

- 1 最終的に，0 万円になって終了する確率は？ (破産確率)
- 2 終了するまでに賭けを行う回数 (の期待値) は？

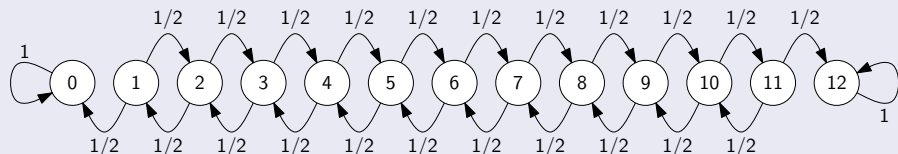
## ギャンブラーの破産：とりあえず，シミュレーション

 $n = 10$  の場合

10回の試行中，破産は7回

## ギャンブラーの破産：マルコフ連鎖としてのモデル化

- ▶ 状態空間は  $\{0, 1, \dots, n, \dots, 3n\}$
- ▶  $X_t = t$  回目の賭けをした後の所持金 (単位：万円) (確率変数)

状態遷移図： $n = 4$  のとき

## ギャンブラーの破産：興味の対象

## 問題

- 1 最終的に、0万円になって終了する確率は？
- 2 終了するまでに賭けを行う回数 (の期待値) は？

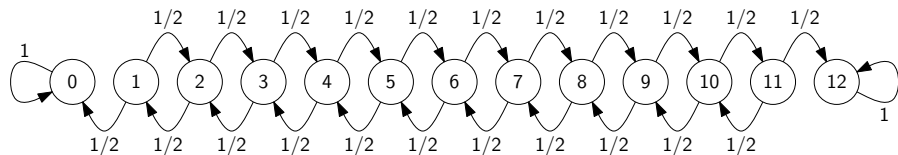
## 興味の対象

- 1  $p_n = \Pr(\exists t \geq 0: X_t = 0 \mid X_0 = n)$  (確率)
- 2  $T_n = E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = n]$  (確率変数の期待値)

## 最終的に 0 万円になって終了する確率：漸化式

$p_k$  = 所持金が  $k$  万円であるとき、0 万円で終了する確率

$$p_k = \Pr(\exists t \geq 0: X_t = 0 \mid X_0 = k)$$



▶ このとき、次の漸化式が得られる

$$\begin{aligned} p_0 &= 1, \\ p_k &= \frac{1}{2}p_{k-1} + \frac{1}{2}p_{k+1} \quad (1 \leq k \leq 3n - 1 \text{ のとき}), \\ p_{3n} &= 0 \end{aligned}$$

## 最終的に 0 万円になって終了する確率：漸化式 (詳細)

$1 \leq k \leq 3n - 1$  のとき,

$$\begin{aligned}
 p_k &= \Pr(\exists t \geq 0: X_t = 0 \mid X_0 = k) \\
 &= \Pr(\exists t \geq 1: X_t = 0 \mid X_0 = k) \\
 &= \sum_{h=0}^{3n} \Pr(\exists t \geq 1: X_t = 0 \mid X_0 = k, X_1 = h) \Pr(X_1 = h \mid X_0 = k) \\
 &= \Pr(\exists t \geq 1: X_t = 0 \mid X_0 = k, X_1 = k - 1) \Pr(X_1 = k - 1 \mid X_0 = k) + \\
 &\quad \Pr(\exists t \geq 1: X_t = 0 \mid X_0 = k, X_1 = k + 1) \Pr(X_1 = k + 1 \mid X_0 = k) \\
 &= \Pr(\exists t \geq 1: X_t = 0 \mid X_1 = k - 1) \cdot \frac{1}{2} + \Pr(\exists t \geq 1: X_t = 0 \mid X_1 = k + 1) \cdot \frac{1}{2} \\
 &= \Pr(\exists t \geq 0: X_t = 0 \mid X_0 = k - 1) \cdot \frac{1}{2} + \Pr(\exists t \geq 0: X_t = 0 \mid X_0 = k + 1) \cdot \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{2} p_{k-1} + \frac{1}{2} p_{k+1}
 \end{aligned}$$

最終的に 0 万円になって終了する確率：漸化式を解く (1)

$$\begin{aligned} p_0 &= 1, \\ p_k &= \frac{1}{2}p_{k-1} + \frac{1}{2}p_{k+1} \quad (1 \leq k \leq 3n-1 \text{ のとき}), \\ p_{3n} &= 0 \end{aligned}$$



最終的に 0 万円になって終了する確率：漸化式を解く (1)

$$\begin{aligned} p_0 &= 1, \\ p_k &= \frac{1}{2}p_{k-1} + \frac{1}{2}p_{k+1} \quad (1 \leq k \leq 3n-1 \text{ のとき}), \\ p_{3n} &= 0 \end{aligned}$$

▶ つまり,  $1 \leq k \leq 3n-1$  のとき

$$p_{k+1} - p_k = p_k - p_{k-1}$$

## 最終的に 0 万円になって終了する確率：漸化式を解く (1)

$$\begin{aligned}
 p_0 &= 1, \\
 p_k &= \frac{1}{2}p_{k-1} + \frac{1}{2}p_{k+1} \quad (1 \leq k \leq 3n-1 \text{ のとき}), \\
 p_{3n} &= 0
 \end{aligned}$$

- ▶ つまり,  $1 \leq k \leq 3n-1$  のとき

$$p_{k+1} - p_k = p_k - p_{k-1}$$

- ▶  $q_k = p_{k+1} - p_k$  と置くと

$$\begin{aligned}
 q_0 &= p_1 - p_0 = p_1 - 1, \\
 q_k &= q_{k-1} \quad (1 \leq k \leq 3n-1 \text{ のとき})
 \end{aligned}$$

## 最終的に 0 万円になって終了する確率：漸化式を解く (1)

$$\begin{aligned}
 p_0 &= 1, \\
 p_k &= \frac{1}{2}p_{k-1} + \frac{1}{2}p_{k+1} \quad (1 \leq k \leq 3n-1 \text{ のとき}), \\
 p_{3n} &= 0
 \end{aligned}$$

- ▶ つまり,  $1 \leq k \leq 3n-1$  のとき

$$p_{k+1} - p_k = p_k - p_{k-1}$$

- ▶  $q_k = p_{k+1} - p_k$  と置くと

$$\begin{aligned}
 q_0 &= p_1 - p_0 = p_1 - 1, \\
 q_k &= q_{k-1} \quad (1 \leq k \leq 3n-1 \text{ のとき})
 \end{aligned}$$

- ▶ つまり,  $p_1 - 1 = q_0 = q_1 = \dots = q_{3n-1}$  なので, ...  
(次のページへ続く)

## 最終的に 0 万円になって終了する確率：漸化式を解く (2)

▶ つまり,  $p_1 - 1 = q_0 = q_1 = \cdots = q_{3n-1}$  なので

$$p_1 = p_0 + (p_1 - p_0) = 1 + q_0,$$

## 最終的に 0 万円になって終了する確率：漸化式を解く (2)

▶ つまり,  $p_1 - 1 = q_0 = q_1 = \cdots = q_{3n-1}$  なので

$$p_1 = p_0 + (p_1 - p_0) = 1 + q_0,$$

$$p_2 = p_0 + (p_1 - p_0) + (p_2 - p_1) = 1 + q_0 + q_1 = 1 + 2q_0,$$

## 最終的に 0 万円になって終了する確率：漸化式を解く (2)

▶ つまり,  $p_1 - 1 = q_0 = q_1 = \cdots = q_{3n-1}$  なので

$$p_1 = p_0 + (p_1 - p_0) = 1 + q_0,$$

$$p_2 = p_0 + (p_1 - p_0) + (p_2 - p_1) = 1 + q_0 + q_1 = 1 + 2q_0,$$

⋮

$$p_k = p_0 + \sum_{i=0}^{k-1} (p_{i+1} - p_i) = 1 + \sum_{i=0}^{k-1} q_i = 1 + kq_0,$$

## 最終的に 0 万円になって終了する確率：漸化式を解く (2)

▶ つまり,  $p_1 - 1 = q_0 = q_1 = \cdots = q_{3n-1}$  なので

$$p_1 = p_0 + (p_1 - p_0) = 1 + q_0,$$

$$p_2 = p_0 + (p_1 - p_0) + (p_2 - p_1) = 1 + q_0 + q_1 = 1 + 2q_0,$$

$$\vdots$$

$$p_k = p_0 + \sum_{i=0}^{k-1} (p_{i+1} - p_i) = 1 + \sum_{i=0}^{k-1} q_i = 1 + kq_0,$$

$$\vdots$$

$$p_{3n} = 1 + 3nq_0$$

## 最終的に 0 万円になって終了する確率：漸化式を解く (2)

▶ つまり,  $p_1 - 1 = q_0 = q_1 = \dots = q_{3n-1}$  なので

$$p_1 = p_0 + (p_1 - p_0) = 1 + q_0,$$

$$p_2 = p_0 + (p_1 - p_0) + (p_2 - p_1) = 1 + q_0 + q_1 = 1 + 2q_0,$$

$$\vdots$$

$$p_k = p_0 + \sum_{i=0}^{k-1} (p_{i+1} - p_i) = 1 + \sum_{i=0}^{k-1} q_i = 1 + kq_0,$$

$$\vdots$$

$$0 = p_{3n} = 1 + 3nq_0$$



## 最終的に 0 万円になって終了する確率：漸化式を解く (2)

- ▶ つまり,  $p_1 - 1 = q_0 = q_1 = \cdots = q_{3n-1}$  なので

$$p_1 = p_0 + (p_1 - p_0) = 1 + q_0,$$

$$p_2 = p_0 + (p_1 - p_0) + (p_2 - p_1) = 1 + q_0 + q_1 = 1 + 2q_0,$$

$$\vdots$$

$$p_k = p_0 + \sum_{i=0}^{k-1} (p_{i+1} - p_i) = 1 + \sum_{i=0}^{k-1} q_i = 1 + kq_0,$$

$$\vdots$$

$$0 = p_{3n} = 1 + 3nq_0$$

- ▶ したがって,  $q_0 = -\frac{1}{3n}$

## 最終的に 0 万円になって終了する確率：漸化式を解く (2)

- ▶ つまり,  $p_1 - 1 = q_0 = q_1 = \cdots = q_{3n-1}$  なので

$$p_1 = p_0 + (p_1 - p_0) = 1 + q_0,$$

$$p_2 = p_0 + (p_1 - p_0) + (p_2 - p_1) = 1 + q_0 + q_1 = 1 + 2q_0,$$

$$\vdots$$

$$p_k = p_0 + \sum_{i=0}^{k-1} (p_{i+1} - p_i) = 1 + \sum_{i=0}^{k-1} q_i = 1 + kq_0,$$

$$\vdots$$

$$0 = p_{3n} = 1 + 3nq_0$$

- ▶ したがって,  $q_0 = -\frac{1}{3n}$

- ▶ したがって,  $p_k = 1 - \frac{k}{3n}$ , 特に,  $p_n = 1 - \frac{n}{3n} = \frac{2}{3}$

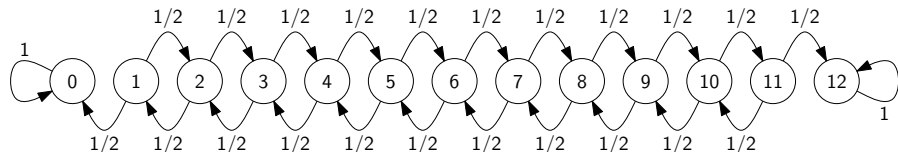
終了するまでに賭けを行う回数 (期待値) : 漸化式 (1)

## 興味の対象

$T_n = E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = n]$  (確率変数の期待値)

▶ 次の期待値を考える

$$T_{n,k} = E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k]$$



終了するまでに賭けを行う回数 (期待値) : 漸化式 (1)

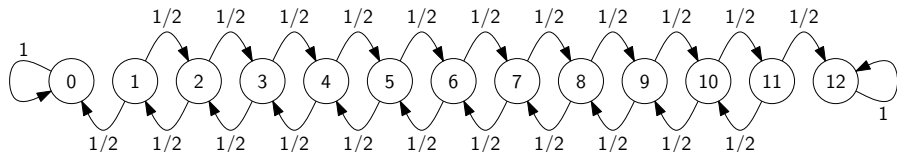
## 興味の対象

$T_n = E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = n]$  (確率変数の期待値)

- ▶ 次の期待値を考える

$$T_{n,k} = E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k]$$

- ▶ このとき,  $T_{n,0} = T_{n,3n} = 0$  が成り立つ



終了するまでに賭けを行う回数 (期待値) : 漸化式 (1)

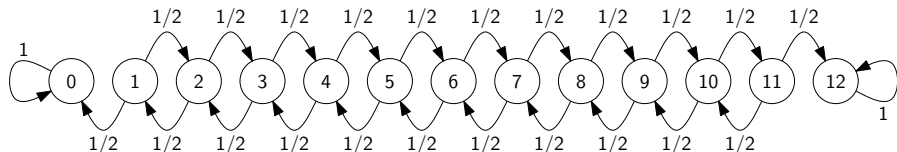
## 興味の対象

$T_n = E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = n]$  (確率変数の期待値)

- ▶ 次の期待値を考える

$$T_{n,k} = E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k]$$

- ▶ このとき,  $T_{n,0} = T_{n,3n} = 0$  が成り立つ



- ▶ また, **直感的には**,  $1 \leq k \leq 3n - 1$  のとき, 次が成り立つ

$$T_{n,k} = 1 + \frac{1}{2} T_{n,k-1} + \frac{1}{2} T_{n,k+1}$$

終了するまでに賭けを行う回数 (期待値) : 漸化式 (1)

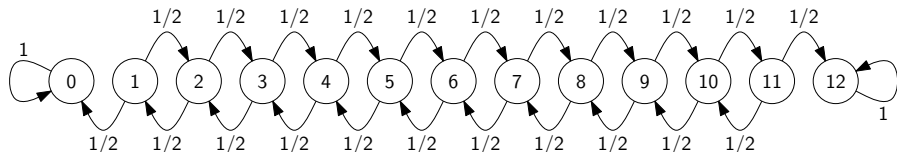
## 興味の対象

$T_n = E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = n]$  (確率変数の期待値)

- ▶ 次の期待値を考える

$$T_{n,k} = E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k]$$

- ▶ このとき,  $T_{n,0} = T_{n,3n} = 0$  が成り立つ



- ▶ また, **直感的には**,  $1 \leq k \leq 3n - 1$  のとき, 次が成り立つ?

$$T_{n,k} = 1 + \frac{1}{2} T_{n,k-1} + \frac{1}{2} T_{n,k+1}$$

終了するまでに賭けを行う回数 (期待値) : 漸化式 (2)

$$\begin{aligned} T_{n,k} \\ &= E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k] \end{aligned}$$

終了するまでに賭けを行う回数 (期待値) : 漸化式 (2)

$$\begin{aligned}
 T_{n,k} &= E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k] \\
 &= \sum_{h=0}^{3n} E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k, X_1 = h] \Pr(X_1 = h \mid X_0 = k)
 \end{aligned}$$

### 演習問題

任意の自然数値確率変数  $X, Y$  と事象  $A$  に対して,  $\Pr(A) \neq 0$  のとき

$$E[X \mid A] = \sum_{i \in \mathbb{N}} E[X \mid A \text{ かつ } Y = i] \Pr(Y = i \mid A)$$



終了するまでに賭けを行う回数 (期待値) : 漸化式 (2)

$$\begin{aligned}
 T_{n,k} &= E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k] \\
 &= \sum_{h=0}^{3n} E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k, X_1 = h] \Pr(X_1 = h \mid X_0 = k) \\
 &= E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0=k, X_1=k+1] \Pr(X_1=k+1 \mid X_0=k) + \\
 &\quad E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0=k, X_1=k-1] \Pr(X_1=k-1 \mid X_0=k)
 \end{aligned}$$

## 演習問題

任意の自然数値確率変数  $X, Y$  と事象  $A$  に対して,  $\Pr(A) \neq 0$  のとき

$$E[X \mid A] = \sum_{i \in \mathbb{N}} E[X \mid A \text{ かつ } Y = i] \Pr(Y = i \mid A)$$

終了するまでに賭けを行う回数 (期待値) : 漸化式 (2)

$$\begin{aligned}
 T_{n,k} &= E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k] \\
 &= \sum_{h=0}^{3n} E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k, X_1 = h] \Pr(X_1 = h \mid X_0 = k) \\
 &= E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k, X_1 = k+1] \Pr(X_1 = k+1 \mid X_0 = k) + \\
 &\quad E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k, X_1 = k-1] \Pr(X_1 = k-1 \mid X_0 = k) \\
 &= (1 + T_{n,k+1}) \cdot \frac{1}{2} + (1 + T_{n,k-1}) \cdot \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

## 演習問題

任意の自然数値確率変数  $X, Y$  と事象  $A$  に対して,  $\Pr(A) \neq 0$  のとき

$$E[X \mid A] = \sum_{i \in \mathbb{N}} E[X \mid A \text{ かつ } Y = i] \Pr(Y = i \mid A)$$

終了するまでに賭けを行う回数 (期待値) : 漸化式 (2)

$$\begin{aligned}
 T_{n,k} &= E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k] \\
 &= \sum_{h=0}^{3n} E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k, X_1 = h] \Pr(X_1 = h \mid X_0 = k) \\
 &= E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k, X_1 = k+1] \Pr(X_1 = k+1 \mid X_0 = k) + \\
 &\quad E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k, X_1 = k-1] \Pr(X_1 = k-1 \mid X_0 = k) \\
 &= (1 + T_{n,k+1}) \cdot \frac{1}{2} + (1 + T_{n,k-1}) \cdot \frac{1}{2} \\
 &= 1 + \frac{1}{2} T_{n,k+1} + \frac{1}{2} T_{n,k-1}
 \end{aligned}$$

## 演習問題

任意の自然数値確率変数  $X, Y$  と事象  $A$  に対して,  $\Pr(A) \neq 0$  のとき

$$E[X \mid A] = \sum_{i \in \mathbb{N}} E[X \mid A \text{ かつ } Y = i] \Pr(Y = i \mid A)$$

終了するまでに賭けを行う回数 (期待値) : 漸化式を解く (1)

## 解くべき漸化式

$$T_{n,k} = \begin{cases} 0 & (k \in \{0, 3n\} \text{ のとき}) \\ 1 + \frac{1}{2}T_{n,k+1} + \frac{1}{2}T_{n,k-1} & (1 \leq k \leq 3n-1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

最終的に知りたいのは,  $T_{n,n}$

- ▶  $1 \leq k \leq 3n-1$  のとき,

$$T_{n,k+1} - T_{n,k} = T_{n,k} - T_{n,k-1} - 2$$

- ▶  $U_k = T_{n,k+1} - T_{n,k}$  と置くと,

$$1 \leq k \leq 3n-1 \text{ のとき, } U_k = U_{k-1} - 2$$

終了するまでに賭けを行う回数 (期待値) : 漸化式を解く (2)

$$T_{n,1} = T_{n,0} + (T_{n,1} - T_{n,0}) = U_0,$$

終了するまでに賭けを行う回数 (期待値) : 漸化式を解く (2)

$$T_{n,1} = T_{n,0} + (T_{n,1} - T_{n,0}) = U_0,$$

$$\begin{aligned} T_{n,2} &= T_{n,0} + (T_{n,1} - T_{n,0}) + (T_{n,2} - T_{n,1}) \\ &= U_0 + U_1 = U_0 + U_0 - 2 = 2U_0 - 2, \end{aligned}$$

終了するまでに賭けを行う回数 (期待値) : 漸化式を解く (2)

$$T_{n,1} = T_{n,0} + (T_{n,1} - T_{n,0}) = U_0,$$

$$\begin{aligned} T_{n,2} &= T_{n,0} + (T_{n,1} - T_{n,0}) + (T_{n,2} - T_{n,1}) \\ &= U_0 + U_1 = U_0 + U_0 - 2 = 2U_0 - 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{n,3} &= T_{n,0} + (T_{n,1} - T_{n,0}) + (T_{n,2} - T_{n,1}) + (T_{n,3} - T_{n,2}) \\ &= U_0 + U_1 + U_2 = U_0 + U_0 - 2 + U_0 - 4 = 3U_0 - 6, \end{aligned}$$

終了するまでに賭けを行う回数 (期待値) : 漸化式を解く (2)

$$T_{n,1} = T_{n,0} + (T_{n,1} - T_{n,0}) = U_0,$$

$$\begin{aligned} T_{n,2} &= T_{n,0} + (T_{n,1} - T_{n,0}) + (T_{n,2} - T_{n,1}) \\ &= U_0 + U_1 = U_0 + U_0 - 2 = 2U_0 - 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{n,3} &= T_{n,0} + (T_{n,1} - T_{n,0}) + (T_{n,2} - T_{n,1}) + (T_{n,3} - T_{n,2}) \\ &= U_0 + U_1 + U_2 = U_0 + U_0 - 2 + U_0 - 4 = 3U_0 - 6, \end{aligned}$$

⋮

$$T_{n,k} = T_{n,0} + \sum_{i=0}^{k-1} (T_{n,i+1} - T_{n,i}) = kU_0 - k(k-1),$$



終了するまでに賭けを行う回数 (期待値) : 漸化式を解く (2)

$$T_{n,1} = T_{n,0} + (T_{n,1} - T_{n,0}) = U_0,$$

$$\begin{aligned} T_{n,2} &= T_{n,0} + (T_{n,1} - T_{n,0}) + (T_{n,2} - T_{n,1}) \\ &= U_0 + U_1 = U_0 + U_0 - 2 = 2U_0 - 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{n,3} &= T_{n,0} + (T_{n,1} - T_{n,0}) + (T_{n,2} - T_{n,1}) + (T_{n,3} - T_{n,2}) \\ &= U_0 + U_1 + U_2 = U_0 + U_0 - 2 + U_0 - 4 = 3U_0 - 6, \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$T_{n,k} = T_{n,0} + \sum_{i=0}^{k-1} (T_{n,i+1} - T_{n,i}) = kU_0 - k(k-1),$$

$$\vdots$$

$$T_{n,3n} = 3nU_0 - 3n(3n-1)$$

終了するまでに賭けを行う回数 (期待値) : 漸化式を解く (2)

$$T_{n,1} = T_{n,0} + (T_{n,1} - T_{n,0}) = U_0,$$

$$\begin{aligned} T_{n,2} &= T_{n,0} + (T_{n,1} - T_{n,0}) + (T_{n,2} - T_{n,1}) \\ &= U_0 + U_1 = U_0 + U_0 - 2 = 2U_0 - 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{n,3} &= T_{n,0} + (T_{n,1} - T_{n,0}) + (T_{n,2} - T_{n,1}) + (T_{n,3} - T_{n,2}) \\ &= U_0 + U_1 + U_2 = U_0 + U_0 - 2 + U_0 - 4 = 3U_0 - 6, \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$T_{n,k} = T_{n,0} + \sum_{i=0}^{k-1} (T_{n,i+1} - T_{n,i}) = kU_0 - k(k-1),$$

$$\vdots$$

$$0 = T_{n,3n} = 3nU_0 - 3n(3n-1)$$

終了するまでに賭けを行う回数 (期待値) : 漸化式を解く (3)

$$\begin{aligned} T_{n,k} &= kU_0 - k(k-1) \quad (k \in \{1, 2, \dots, 3n\}), \\ 0 = T_{n,3n} &= 3nU_0 - 3n(3n-1) \end{aligned}$$

終了するまでに賭けを行う回数 (期待値) : 漸化式を解く (3)

$$\begin{aligned} T_{n,k} &= kU_0 - k(k-1) \quad (k \in \{1, 2, \dots, 3n\}), \\ 0 = T_{n,3n} &= 3nU_0 - 3n(3n-1) \end{aligned}$$

▶ したがって,  $U_0 = 3n - 1$

終了するまでに賭けを行う回数 (期待値) : 漸化式を解く (3)

$$\begin{aligned} T_{n,k} &= kU_0 - k(k-1) \quad (k \in \{1, 2, \dots, 3n\}), \\ 0 = T_{n,3n} &= 3nU_0 - 3n(3n-1) \end{aligned}$$

- ▶ したがって,  $U_0 = 3n - 1$
- ▶ したがって,  $k \in \{1, 2, \dots, 3n\}$  のとき,

$$T_{n,k} = k(3n - 1) - k(k - 1) = k(3n - k)$$

終了するまでに賭けを行う回数 (期待値) : 漸化式を解く (3)

$$T_{n,k} = kU_0 - k(k-1) \quad (k \in \{1, 2, \dots, 3n\}),$$

$$0 = T_{n,3n} = 3nU_0 - 3n(3n-1)$$

- ▶ したがって,  $U_0 = 3n - 1$
- ▶ したがって,  $k \in \{1, 2, \dots, 3n\}$  のとき,

$$T_{n,k} = k(3n-1) - k(k-1) = k(3n-k)$$

- ▶  $T_{n,0} = 0$  なので,  $k \in \{0, 1, 2, \dots, 3n\}$  のとき,

$$T_{n,k} = k(3n-1) - k(k-1) = k(3n-k)$$

終了するまでに賭けを行う回数 (期待値) : 漸化式を解く (3)

$$T_{n,k} = kU_0 - k(k-1) \quad (k \in \{1, 2, \dots, 3n\}),$$

$$0 = T_{n,3n} = 3nU_0 - 3n(3n-1)$$

- ▶ したがって,  $U_0 = 3n - 1$
- ▶ したがって,  $k \in \{1, 2, \dots, 3n\}$  のとき,

$$T_{n,k} = k(3n-1) - k(k-1) = k(3n-k)$$

- ▶  $T_{n,0} = 0$  なので,  $k \in \{0, 1, 2, \dots, 3n\}$  のとき,

$$T_{n,k} = k(3n-1) - k(k-1) = k(3n-k)$$

つまり,  $T_n = T_{n,n} = n(3n-n) = 2n^2$

## ギャンブラーの破産：設定

## 設定

- ▶ 1人のギャンブラー，所持金  $n$  万円
- ▶ 賭けを行うごとに，
  - ▶  $1/2$  の確率で，所持金が 1 万円増加
  - ▶  $1/2$  の確率で，所持金が 1 万円減少
- ▶ 所持金が  $3n$  万円か 0 万円になったら，終了

## 問題と解答

- 1 最終的に，0 万円になって終了する確率は？ (破産確率)  
↪  $\frac{2}{3}$
- 2 終了するまでに賭けを行う回数 (の期待値) は？  
↪  $2n^2$



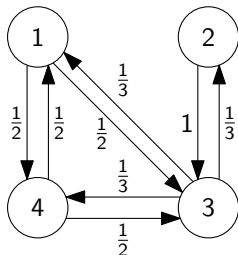
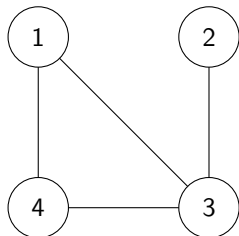
## 目次

- ① ギャンブラーの破産
- ② 有限グラフ上の単純ランダムウォーク
- ③ 今日のまとめ

## 有限グラフ上の単純ランダムウォーク：設定

有限無向グラフ  $G = (V, E)$  :  $V$  は  $G$  の頂点集合,  $E$  は  $G$  の辺集合

- ▶ 時刻  $t = 0, 1, 2, 3, \dots$  に対して, 次のように駒を動かす
  - ▶  $t = 0$  のとき, 駒はある決められた頂点  $u \in V$  に置かれている
  - ▶  $t = k$  のとき, 駒が頂点  $v \in V$  に置かれているとすると,  $t = k + 1$  のとき, 駒は  $v$  の隣接頂点へ等確率で動かされる
- ▶ 時刻  $t$  において駒の置かれる頂点を  $X_t$  とすると,  $\langle X_t \mid t \in \mathbb{N} \rangle$  は確率過程



- ▶ この確率過程を  $G$  上の**単純ランダムウォーク**と呼ぶ

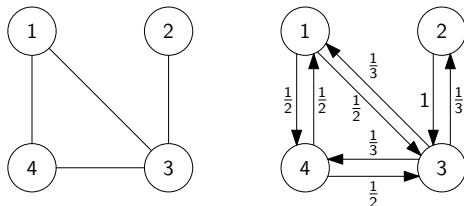
## 有限グラフ上の単純ランダムウォーク：興味の対象

有限無向グラフ  $G = (V, E)$ 

到達時刻 とは？

$G$  上の単純ランダムウォークにおいて、  
 頂点  $u \in V$  から頂点  $v \in V$  への到達時刻とは、

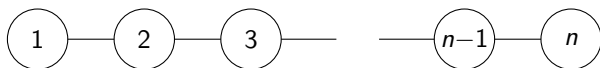
$$\tau_{u,v} = \min\{t \geq 0 \mid X_t = v, X_0 = u\}$$



- ▶ この期待値を到達時刻と呼ぶこともある
- ▶ 「 $t \geq 0$ 」ではなく「 $t \geq 1$ 」とする場合もある

## 到達時刻：道の場合 (1)

次のグラフを考える (頂点数  $n$  の道)



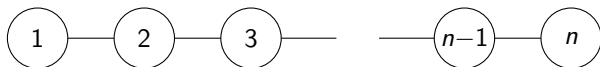
左端の頂点を 1, 右端の頂点を  $n$  として,  $E[\tau_{1,n}]$  を計算する

- ▶ グラフの形状から次が分かる

$$\tau_{1,n} = \tau_{1,2} + \tau_{2,3} + \cdots + \tau_{n-1,n}$$

## 到達時刻：道の場合 (1)

次のグラフを考える (頂点数  $n$  の道)



左端の頂点を 1, 右端の頂点を  $n$  として,  $E[\tau_{1,n}]$  を計算する

- ▶ グラフの形状から次が分かる

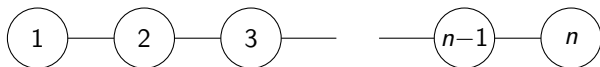
$$\tau_{1,n} = \tau_{1,2} + \tau_{2,3} + \cdots + \tau_{n-1,n}$$

- ▶ したがって, 期待値の線形性より

$$E[\tau_{1,n}] = E[\tau_{1,2}] + E[\tau_{2,3}] + \cdots + E[\tau_{n-1,n}]$$

## 到達時刻：道の場合 (1)

次のグラフを考える (頂点数  $n$  の道)



左端の頂点を 1, 右端の頂点を  $n$  として,  $E[\tau_{1,n}]$  を計算する

- ▶ グラフの形状から次が分かる

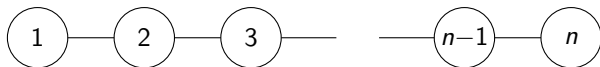
$$\tau_{1,n} = \tau_{1,2} + \tau_{2,3} + \cdots + \tau_{n-1,n}$$

- ▶ したがって, 期待値の線形性より

$$E[\tau_{1,n}] = E[\tau_{1,2}] + E[\tau_{2,3}] + \cdots + E[\tau_{n-1,n}]$$

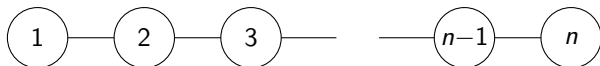
- ▶ つまり, 任意の  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  に対する  $E[\tau_{i,i+1}]$  が分かればよい

## 到達時刻：道の場合 (2) — 漸化式の導出



- ▶ まず,  $E[\tau_{1,2}] = 1$

## 到達時刻：道の場合 (2) — 漸化式の導出

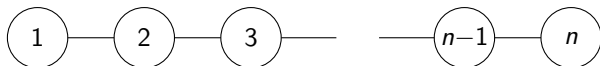


- ▶ まず,  $E[\tau_{1,2}] = 1$
- ▶ 次に,  $i \in \{2, \dots, n-1\}$  のとき,

$$E[\tau_{i,i+1}] = 1 \cdot \frac{1}{2} + (1 + E[\tau_{i-1,i+1}]) \cdot \frac{1}{2}$$



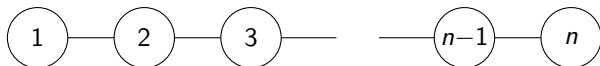
## 到達時刻：道の場合 (2) — 漸化式の導出



- ▶ まず,  $E[\tau_{1,2}] = 1$
- ▶ 次に,  $i \in \{2, \dots, n-1\}$  のとき,

$$\begin{aligned}
 E[\tau_{i,i+1}] &= 1 \cdot \frac{1}{2} + (1 + E[\tau_{i-1,i+1}]) \cdot \frac{1}{2} \\
 &= 1 + \frac{1}{2}(E[\tau_{i-1,i}] + E[\tau_{i,i+1}])
 \end{aligned}$$

## 到達時刻：道の場合 (2) — 漸化式の導出



- ▶ まず,  $E[\tau_{1,2}] = 1$
- ▶ 次に,  $i \in \{2, \dots, n-1\}$  のとき,

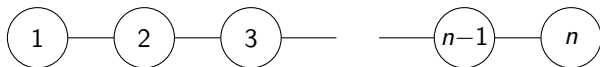
$$\begin{aligned}
 E[\tau_{i,i+1}] &= 1 \cdot \frac{1}{2} + (1 + E[\tau_{i-1,i+1}]) \cdot \frac{1}{2} \\
 &= 1 + \frac{1}{2}(E[\tau_{i-1,i}] + E[\tau_{i,i+1}]) \\
 \therefore E[\tau_{i,i+1}] &= 2 + E[\tau_{i-1,i}]
 \end{aligned}$$

## 到達時刻：道の場合 (3) — 結論

- ▶ したがって、 $a_i = E[\tau_{i,i+1}]$  と置くと

$$a_i = \begin{cases} 1 & (i = 1 \text{ のとき}), \\ 2 + a_{i-1} & (i \in \{2, \dots, n-1\} \text{ のとき}) \end{cases}$$

- ▶ これを解くと、任意の  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  に対して、 $a_i = 2i - 1$



## 到達時刻：道の場合 (3) — 結論

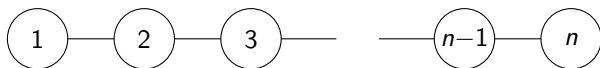
- ▶ したがって、 $a_i = E[\tau_{i,i+1}]$  と置くと

$$a_i = \begin{cases} 1 & (i = 1 \text{ のとき}), \\ 2 + a_{i-1} & (i \in \{2, \dots, n-1\} \text{ のとき}) \end{cases}$$

- ▶ これを解くと、任意の  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  に対して、 $a_i = 2i - 1$

## 証明したこと

任意の  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  に対して、 $E[\tau_{i,i+1}] = 2i - 1$



## 到達時刻：道の場合 (3) — 結論

- ▶ したがって、 $a_i = E[\tau_{i,i+1}]$  と置くと

$$a_i = \begin{cases} 1 & (i = 1 \text{ のとき}), \\ 2 + a_{i-1} & (i \in \{2, \dots, n-1\} \text{ のとき}) \end{cases}$$

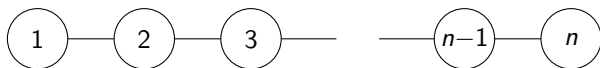
- ▶ これを解くと、任意の  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  に対して、 $a_i = 2i - 1$

## 証明したこと

任意の  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  に対して、 $E[\tau_{i,i+1}] = 2i - 1$

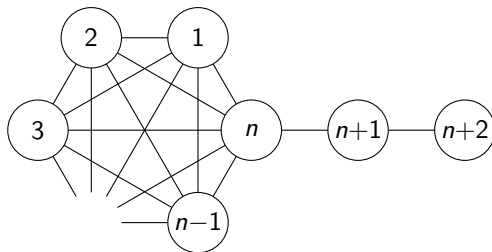
以上の考察をまとめると、

$$\begin{aligned} E[\tau_{1,n}] &= E[\tau_{1,2}] + E[\tau_{2,3}] + \cdots + E[\tau_{n-1,n}] \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (2i - 1) = (n - 1)^2 \end{aligned}$$



## 到達時刻：完全グラフ + 道の場合

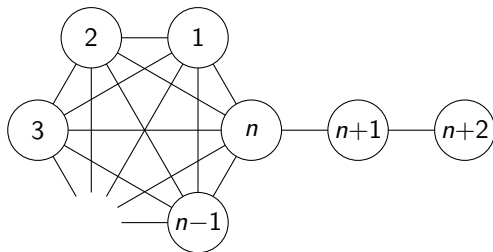
次のグラフを考える (頂点数  $n$  の完全グラフに長さ 2 の道を追加)



$E[\tau_{1,n+2}]$  を計算する

## 到達時刻：完全グラフ + 道の場合

次のグラフを考える (頂点数  $n$  の完全グラフに長さ 2 の道を追加)



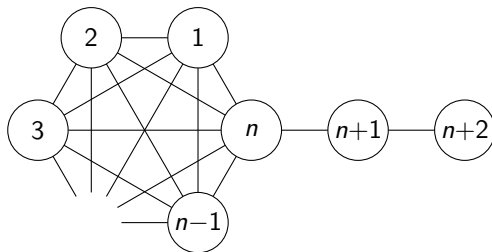
$E[\tau_{1,n+2}]$  を計算する

- ▶ グラフの形状から次が分かる

$$\tau_{1,n+2} = \tau_{1,n} + \tau_{n,n+1} + \tau_{n+1,n+2}$$

## 到達時刻：完全グラフ + 道の場合

次のグラフを考える (頂点数  $n$  の完全グラフに長さ 2 の道を追加)



$E[\tau_{1,n+2}]$  を計算する

- ▶ グラフの形状から次が分かる

$$\tau_{1,n+2} = \tau_{1,n} + \tau_{n,n+1} + \tau_{n+1,n+2}$$

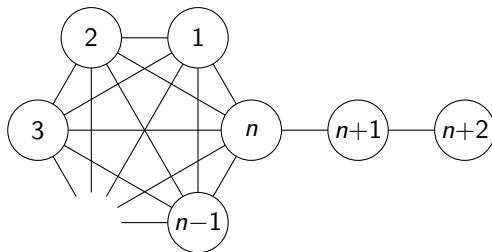
- ▶ したがって、期待値の線形性から

$$E[\tau_{1,n+2}] = E[\tau_{1,n}] + E[\tau_{n,n+1}] + E[\tau_{n+1,n+2}]$$



## 到達時刻：完全グラフ + 道の場合

次のグラフを考える (頂点数  $n$  の完全グラフに長さ 2 の道を追加)



$E[\tau_{1,n+2}]$  を計算する

- ▶ グラフの形状から次が分かる

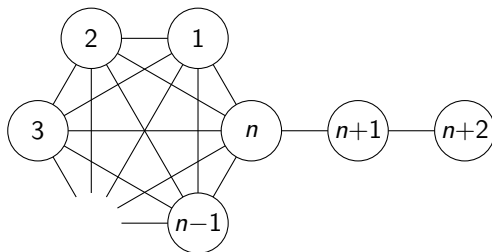
$$\tau_{1,n+2} = \tau_{1,n} + \tau_{n,n+1} + \tau_{n+1,n+2}$$

- ▶ したがって、期待値の線形性から

$$E[\tau_{1,n+2}] = E[\tau_{1,n}] + E[\tau_{n,n+1}] + E[\tau_{n+1,n+2}]$$

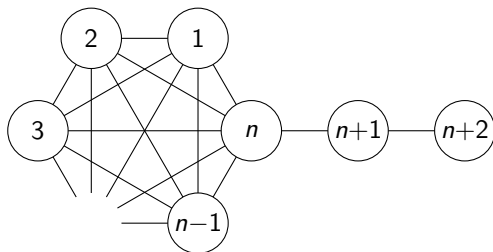
- ▶ つまり、 $E[\tau_{1,n}]$ ,  $E[\tau_{n,n+1}]$ ,  $E[\tau_{n+1,n+2}]$  が分かればよい

## 到達時刻：完全グラフ + 道の場合 (2)



$$E[\tau_{1,n}] = \frac{1}{n-1} \cdot 1 + \frac{n-2}{n-1} (1 + E[\tau_{1,n}])$$

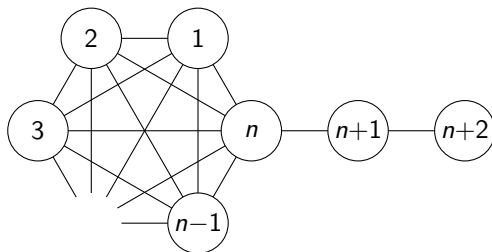
## 到達時刻：完全グラフ + 道の場合 (2)



$$E[\tau_{1,n}] = \frac{1}{n-1} \cdot 1 + \frac{n-2}{n-1} (1 + E[\tau_{1,n}])$$

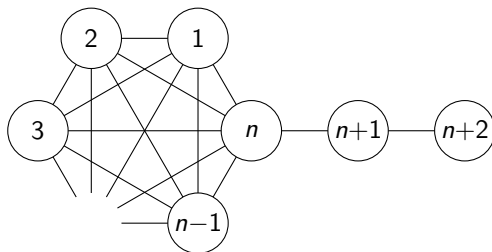
$$(n-1)E[\tau_{1,n}] = n-1 + (n-2)E[\tau_{1,n}]$$

## 到達時刻：完全グラフ + 道の場合 (2)



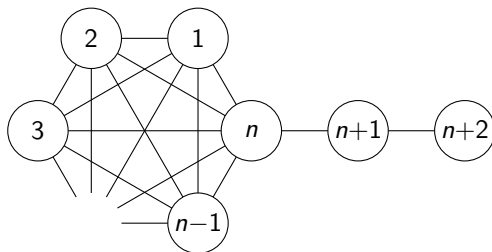
$$\begin{aligned}
 E[\tau_{1,n}] &= \frac{1}{n-1} \cdot 1 + \frac{n-2}{n-1} (1 + E[\tau_{1,n}]) \\
 (n-1)E[\tau_{1,n}] &= n-1 + (n-2)E[\tau_{1,n}] \\
 \therefore E[\tau_{1,n}] &= n-1
 \end{aligned}$$

## 到達時刻：完全グラフ + 道の場合 (3)



$$E[\tau_{n,n+1}] = \frac{1}{n} \cdot 1 + \frac{n-1}{n} (1 + E[\tau_{1,n}] + E[\tau_{n,n+1}])$$

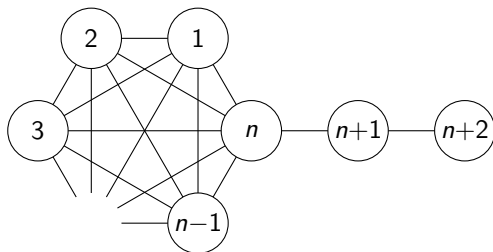
## 到達時刻：完全グラフ + 道の場合 (3)



$$E[\tau_{n,n+1}] = \frac{1}{n} \cdot 1 + \frac{n-1}{n} (1 + E[\tau_{1,n}] + E[\tau_{n,n+1}])$$

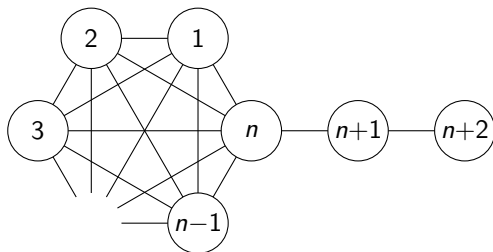
$$nE[\tau_{n,n+1}] = n + (n-1)E[\tau_{1,n}] + (n-1)E[\tau_{n,n+1}]$$

## 到達時刻：完全グラフ + 道の場合 (3)



$$\begin{aligned}
 E[\tau_{n,n+1}] &= \frac{1}{n} \cdot 1 + \frac{n-1}{n} (1 + E[\tau_{1,n}] + E[\tau_{n,n+1}]) \\
 nE[\tau_{n,n+1}] &= n + (n-1)E[\tau_{1,n}] + (n-1)E[\tau_{n,n+1}] \\
 &= n + (n-1)^2 + (n-1)E[\tau_{n,n+1}]
 \end{aligned}$$

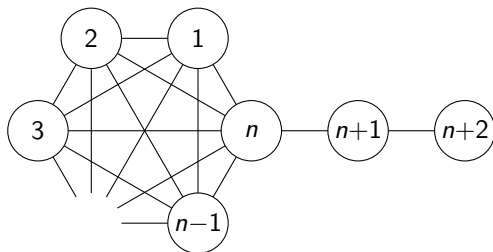
## 到達時刻：完全グラフ + 道の場合 (3)



$$\begin{aligned}
 E[\tau_{n,n+1}] &= \frac{1}{n} \cdot 1 + \frac{n-1}{n} (1 + E[\tau_{1,n}] + E[\tau_{n,n+1}]) \\
 nE[\tau_{n,n+1}] &= n + (n-1)E[\tau_{1,n}] + (n-1)E[\tau_{n,n+1}] \\
 &= n + (n-1)^2 + (n-1)E[\tau_{n,n+1}] \\
 \therefore E[\tau_{n,n+1}] &= n + (n-1)^2 = n^2 - n + 1
 \end{aligned}$$

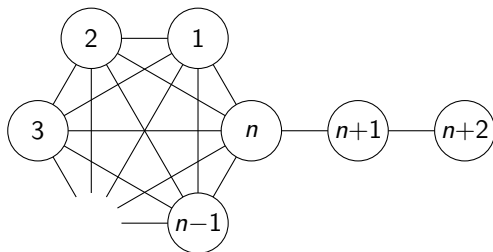


## 到達時刻：完全グラフ + 道の場合 (4)



$$E[\tau_{n+1, n+2}] = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}(1 + E[\tau_{n, n+1}] + E[\tau_{n+1, n+2}])$$

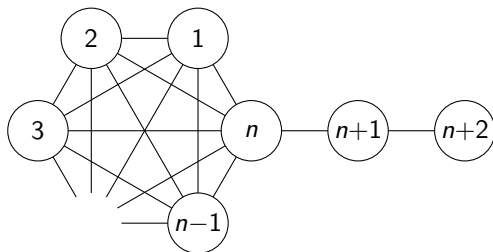
## 到達時刻：完全グラフ + 道の場合 (4)



$$E[\tau_{n+1, n+2}] = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}(1 + E[\tau_{n, n+1}] + E[\tau_{n+1, n+2}])$$

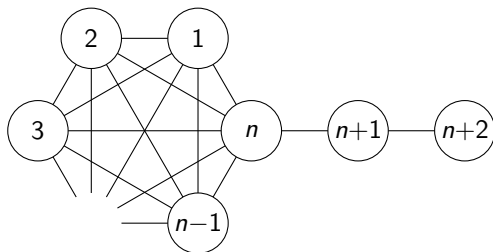
$$2E[\tau_{n+1, n+2}] = 2 + E[\tau_{n, n+1}] + E[\tau_{n+1, n+2}]$$

## 到達時刻：完全グラフ + 道の場合 (4)



$$\begin{aligned}
 E[\tau_{n+1,n+2}] &= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}(1 + E[\tau_{n,n+1}] + E[\tau_{n+1,n+2}]) \\
 2E[\tau_{n+1,n+2}] &= 2 + E[\tau_{n,n+1}] + E[\tau_{n+1,n+2}] \\
 &= 2 + (n^2 - n + 1) + E[\tau_{n+1,n+2}]
 \end{aligned}$$

## 到達時刻：完全グラフ + 道の場合 (4)

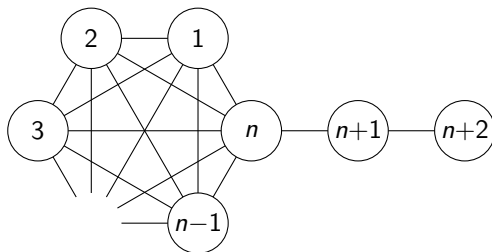


$$E[\tau_{n+1, n+2}] = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}(1 + E[\tau_{n, n+1}] + E[\tau_{n+1, n+2}])$$

$$\begin{aligned} 2E[\tau_{n+1, n+2}] &= 2 + E[\tau_{n, n+1}] + E[\tau_{n+1, n+2}] \\ &= 2 + (n^2 - n + 1) + E[\tau_{n+1, n+2}] \end{aligned}$$

$$\therefore E[\tau_{n+1, n+2}] = 2 + (n^2 - n + 1) = n^2 - n + 3$$

## 到達時刻：完全グラフ + 道の場合 (5)

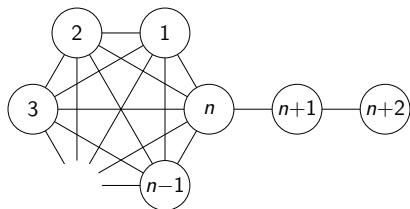


したがって,

$$\begin{aligned}
 E[\tau_{1,n+2}] &= E[\tau_{1,n}] + E[\tau_{n,n+1}] + E[\tau_{n+1,n+2}] \\
 &= (n-1) + (n^2 - n + 1) + (n^2 - n + 3) \\
 &= 2n^2 - n + 3
 \end{aligned}$$

## 到達時刻の比較

- ▶ 頂点数  $n + 2$  の道 :  
到達時刻の期待値  $= (n + 1)^2$
- ▶ 頂点数  $n$  の完全グラフ + 長さ 2 の道 :  
到達時刻の期待値  $= 2n^2 - n + 3$



教訓 : 辺を多くすると、到達時刻の期待値が増えることがある

## 目次

- ① ギャンブラーの破産
- ② 有限グラフ上の単純ランダムウォーク
- ③ 今日のまとめ

## 今日の目標

## 今日の目標

マルコフ連鎖について以下ができるようになる

- ▶ 「ギャンブラーの破産」において、破産確率を計算できる
- ▶ 「有限グラフ上の単純ランダムウォーク」において、到達時刻 (の期待値) を計算できる

この講義で扱うマルコフ連鎖は

「斉次 離散時間 有限状態 マルコフ連鎖」と呼ばれるもの



## 残った時間の使い方

- ▶ 授業評価アンケートに答える
- ▶ 演習問題をやる
  - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
  - ▶ 教員と TA は巡回
- ▶ 退室時, 小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - ▶ 内容は何でも OK
  - ▶ 匿名で OK

## 目次

- ① ギャンブラーの破産
- ② 有限グラフ上の単純ランダムウォーク
- ③ 今日のまとめ